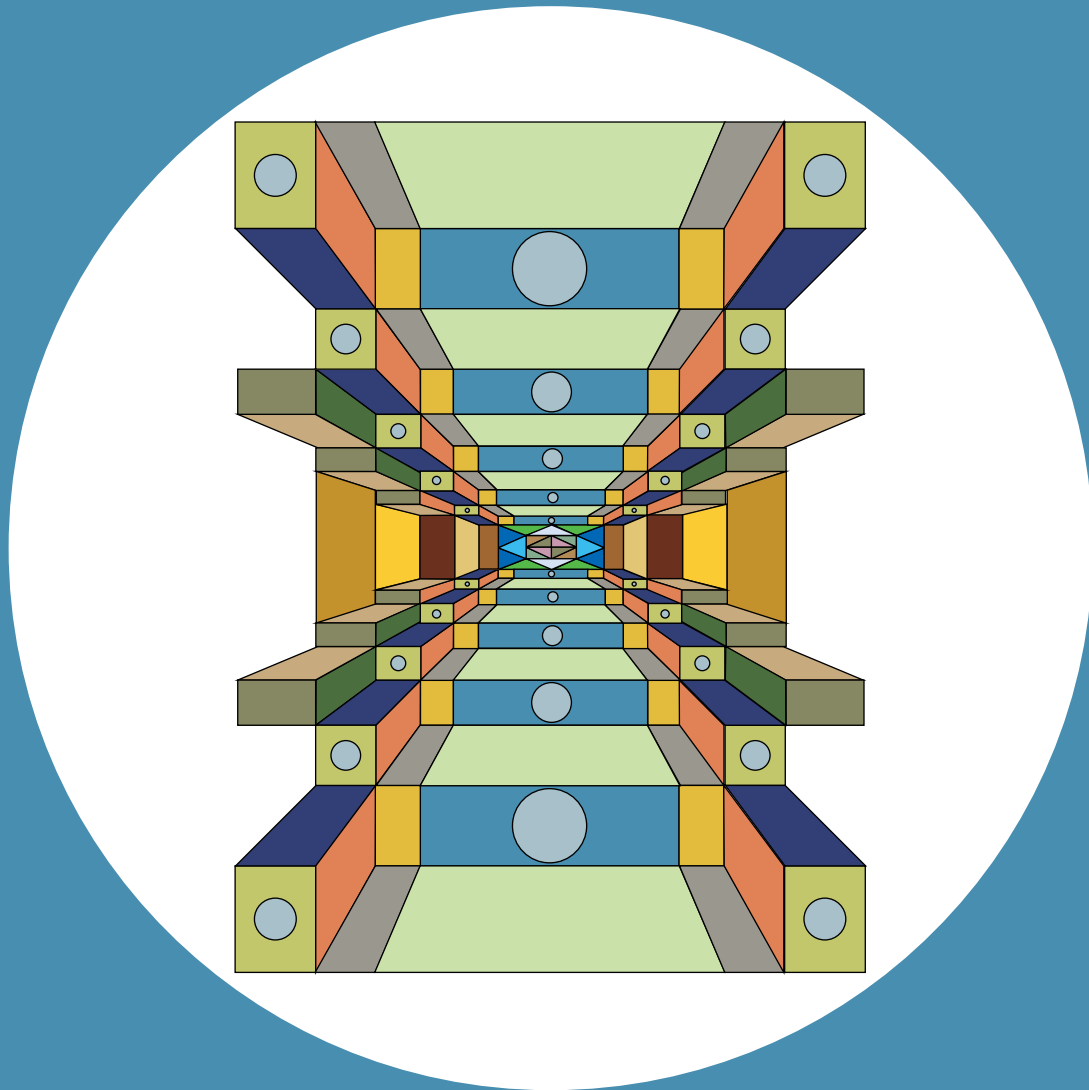


# Matemáticas

Integración del Conocimiento

Aritmético

Séptimo Nivel de Abstracción



MORENO



# Integración del Conocimiento Aritmético

Séptimo Nivel de Abstracción

José Luis Moreno Aranda



# **Integración del Conocimiento Aritmético**

Séptimo Nivel de Abstracción

José Luis Moreno Aranda

Grupo Mathematiké, SA de CV

Prohibido Reproducir

Todos los Derechos Reservados

Impreso en México

2011

# Contenido

## Introducción

La Pedagogía de la Espiral Ascendente Para la Enseñanza de las Matemáticas	vii
Material didáctico Mathematiké	viii
Objetivo del libro	viii
Cómo está organizado el libro	viii
Niveles en la apropiación del conocimiento matemático	viii
Nuestra página de Internet	viii

## Capítulo 1

### Los Números Naturales

Los nueve dígitos	11
El cero	11
Números naturales	12
Dimensiones o realidades de los números naturales	12
Los números también representan dimensiones	12
Las columnas numéricas	13
La columna de las unidades	13
La columna de las decenas	13
Dinámica básica del sistema decimal para crear números	14
Notación desarrollada	15
La columna de las centenas	15
Las columnas numéricas	16
El conjunto de los números naturales	17
El conjunto de los números naturales es infinito	17
Conjunto de los números enteros	18
La recta de los números enteros	18

## Capítulo 2

### Suma y Resta de Números Hasta el 18

Suma y resta de números hasta el 18	21
Suma y resta de números hasta el 18 utilizando las columnas numéricas	21
Suma y resta de números enteros con el material didáctico utilizando 18 dígitos	22
Suma y resta de números enteros con el material didáctico utilizando 9 dígitos	24
Suma con el algoritmo en notación desarrollada y en notación compacta	26
Resta con el algoritmo en notación desarrollada y en notación compacta	27

### Ábaco Tipo Japonés

Escribir números en el ábaco	28
Sumas y restas utilizando el ábaco	29

### La Suma y la Resta Son Operaciones Inversas

Concepto de operación inversa	35
La resta es la operación inversa de la suma	35
La suma es la operación inversa de la resta	35
Número faltante en la suma y la resta	36

## Sumas y Restas Combinadas

Orden para efectuar una operación con varias sumas y una resta	37
Orden para efectuar una operación con varias sumas y varias restas	37

## Capítulo 3

### Multiplicación

Concepto de multiplicación	41
Las tablas de multiplicar	41
Construir las tablas de multiplicar utilizando el material didáctico	41
Multiplicación utilizando las columnas numéricas	41
Multiplicación utilizando notación desarrollada y la cuadrícula	42
Multiplicación utilizando la cuadrícula	43
Multiplicación sin utilizar la cuadrícula y en forma compacta	43
Multiplicación cuando el multiplicando y el multiplicador tienen dos cifras	43
Multiplicación cuando el multiplicando tiene tres cifras y el multiplicador tiene dos cifras	44
Multiplicación de números enteros	44

### División

Concepto de división	45
Las tablas de dividir	45
Notación para efectuar divisiones	45
Residuo de la división	46
División con residuo	47
En cada columna numérica la división se realiza de la misma forma	47
La división cuando el dividendo tiene dos y tres cifras	48
Notación decimal	49
División de dos números expresados en notación decimal	50
División de dos números haciendo las restas mentalmente	51
División de dos números cuando el divisor tiene dos o más dígitos	51
División de dos números haciendo las restas mentalmente	53
División de dos números expresados en notación decimal	54
División de dos números cualquiera enteros o decimales	54

### La Multiplicación y la División

#### Son Operaciones Inversas

La construcción de las tablas de multiplicar y de dividir	55
Concepto de operación inversa	55
La multiplicación y la división son operaciones inversas	55
Número faltante en la multiplicación y la división	56

#### Comprobación de la Multiplicación y la División

Comprobación de la multiplicación	57
Comprobación de la división	57

## Capítulo 4

### Operaciones Básicas en Notación Decimal

Suma y resta de números expresados en notación decimal	61
Multiplicación de números expresados en notación decimal	62
Multiplicación y división por 10	63
Múltiplos	63
Submúltiplos	63

### Problemas de Aplicación

Serie de Ejercicios 4	66
-----------------------	----

## Capítulo 5

### Números Primos y No Primos

Con la multiplicación también podemos crear algunos números naturales	73
Los números primos solamente pueden crearse sumando 1	73
Los números no primos también se crean multiplicando números primos	73
Teorema fundamental de la aritmética	73

Definición de números primos y no primos utilizando la división	74
Factores de un número natural	74
Factores primos de un número natural	75
Descomponer un número no primo en sus factores primos	75
Algoritmo para descomponer un número no primo en sus factores primos	76
Mínimo común múltiplo	77
Algoritmo para encontrar el mínimo común múltiplo	77
<b>Creación de los Números Naturales</b>	
Construir los números naturales utilizando el teorema fundamental de la aritmética	79
Números creados usando el número primo 2	79
Números creados usando el número primo 3	81
Números creados con el número primo 3 dos veces	81
Números creados con los números primos 2 y 3	82
Números creados con el número primo 5	83
Números creados con los números primos 5 y 2	83
Divisibilidad de los números naturales	83
Dimensiones o realidades de los números naturales	85
Números enteros	85
El árbol genealógico es también el teorema fundamental de la aritmética	85
Árbol genealógico de los números enteros	86
<b>Los Números Fraccionarios</b>	
Introducción	87
Concepto de fracción	87
Concepto de unidad de una fracción o número fraccionario	87
La unidad de una fracción puede ser simple o compuesta	88
Notación de un número fraccionario	88
Notación de fracción mixta	91
Fracciones impropias	93
Fracciones equivalentes	96
Números racionales	96
Números irracionales	96
<b>Clasificación de los Números</b>	
El cero	97
Números naturales	97
Números enteros	97
Números fraccionarios o racionales	97
Números irracionales	97
Números reales positivos	97
Clasificación de los números reales positivos	97
Árbol genealógico de los números reales positivos	98
<b>La Recta de los Números Reales Positivos</b>	
Los números también representan una distancia	99
Los números irracionales no se pueden localizar en la recta de los números	100
La recta de los números reales positivos	100
<b>Capítulo 6</b>	
<b>Suma y Resta de Fracciones</b>	
Concepto de suma y resta de fracciones	103
Mínimo común múltiplo	104
Simplificación de fracciones	105
Conversión de fracción simple a notación mixta	105
Conversión de fracción en notación mixta a fracción simple	106
Algoritmo para sumar y restar fracciones	107
Suma y resta de fracciones usando el método rápido	107
Suma y resta de fracciones usando el método tradicional	108
El común denominador es el común múltiplo de los denominadores	109
<b>Multiplicación de Fracciones</b>	
Concepto de la multiplicación de números naturales	112

Concepto de la multiplicación de números naturales	112
Algoritmo para la multiplicación de fracciones	113
<b>División de Fracciones</b>	
Notación de la división de fracciones	115
Concepto de la división de números enteros	115
Concepto de la división de números fraccionarios	116
Algoritmos para la división de fracciones	117
Algoritmo de la división utilizando notación de fracción	117
Algoritmo de la división de fracciones cuando usamos el símbolo de división	118
La ley de la tortilla	118
<b>Problemas de Aplicación</b>	
Serie de Ejercicios 13	120
<b>Capítulo 7</b>	
<b>Sistema Romano de Numeración</b>	
Característica del sistema romano de numeración	125
Símbolos utilizados en los números romanos	125
Procedimiento para escribir números romanos	125
<b>Proporciones</b>	
Concepto de rectas proporcionales	127
Constante de proporcionalidad	127
Figuras geométricas proporcionales o semejantes	128
Cuadrados	129
Rectángulos	129
Triángulos	130
<b>Regla de Tres</b>	
Concepto de regla de tres	131
Razones	131
<b>Promedio</b>	
Concepto de promedio	134
<b>Raíz Cuadrada</b>	
Concepto de raíz cuadrada	136
Cálculo de la raíz cuadrada utilizando material didáctico	136
Algoritmo para calcular la raíz cuadrada	137
Estrategia para desarrollar el algoritmo de la raíz cuadrada	138
El algoritmo de los tres pasos para calcular la raíz cuadrada	138
<b>Apéndice 1</b>	
<b>Respuestas de los Ejercicios</b>	
Capítulo 1	143
Capítulo 2	144
Capítulo 3	145
Capítulo 4	148
Capítulo 5	149
Capítulo 6	150
Capítulo 7	152
<b>Apéndice 2</b>	
<b>Material Didáctico</b>	
Cartulinas	155

# Introducción

## La Pedagogía de la Espiral Ascendente Para la Enseñanza de las Matemáticas

Este libro de texto ha sido elaborado utilizando la *Pedagogía de la Espiral Ascendente* para la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas. Esta pedagogía tiene como marco filosófico referencial una filosofía humanista, es decir, tiene como único objetivo promover las capacidades que identifican a un ser como humano: la imaginación, la inteligencia, la creatividad, la libertad, etcétera. Por lo cual, el plan estratégico de este libro ha sido diseñado pensando únicamente en la promoción humana de los estudiantes que ahora transitan por los salones de clase.

Esta pedagogía ha sido enriquecida utilizando la epistemología de Bernard Lonergan<sup>1</sup>.

Esta metodología pedagógica consiste, en un proceso de cinco pasos que se repiten cada vez que introducimos un nuevo concepto matemático. En nuestra página de Internet se encuentra una explicación detallada de esta novedosa metodología.

La estrategia pedagógica consiste de cinco pasos:

1. *Contextualizar el conocimiento.* Explicitar claramente qué concepto matemático vamos a estudiar y colocarlo sobre la espiral ascendente del conocimiento. Verificar que el estudiante ya se ha apropiado de los conceptos previos necesarios y saber con precisión cuál será el siguiente concepto que estudiaremos, ya que los conceptos no son entes aislados que aparecen de repente, sino que son como ladrillos, que para poder formar una barda, se colocan para soportar a los que estarán encima de ellos.
2. *Experimentar una realidad sensible utilizando los sentidos, para permitirle al estudiante entender el concepto.* A través de una estrategia pedagógica adecuada, el estudiante utilizando sus sentidos, debe tocar, ver, oír, oler o gustar el concepto, para que extrayendo datos inquiera e imagine y así pueda captar la unidad inteligible de esos datos y por lo tanto entender.  
Usando la geometría como hilo conductor en el estudio de las matemáticas, hemos podido utilizar imágenes y material didáctico manipulable para la apropiación de los principales conceptos de las matemáticas.
3. *Demostrar o verificar que lo entendido es cierto.* Cuando el alumno ha entendido y por lo tanto, ha podido formular con sus propias palabras el concepto, entonces se pregunta si lo que ha entendido es verdadero. El estudiante utilizando el conocimiento matemático que hasta este momento ha adquirido, demuestra el concepto dándose así en él o ella la comprensión total.
4. *Aplicar el conocimiento adquirido y desarrollar la habilidad al usarlo en la solución de diferentes tipos de problemas.* Al aplicar el conocimiento, el alumno desarrolla o crea el algoritmo que le permite realizar operaciones o resolver problemas en forma ordenada y eficiente. Sin embargo, no basta sólo con que el alumno construya el algoritmo correspondiente, sino que también, es indispensable que desarrolle la habilidad y acumule la experiencia necesaria para el planteamiento y resolución de ese tipo de problemas.

5. *Evaluar lo aprendido y la forma como fue aprendido.* La evaluación la hacemos en dos sentidos. Primero, debemos verificar si el estudiante se ha apropiado del concepto matemático estudiado y ha desarrollado la habilidad y acumulado la experiencia necesaria en el planteamiento y resolución de problemas. Después, debemos evaluar la forma en la cual hemos expuesto al alumno al concepto, es decir, nuestro propio trabajo como maestros.

## Material didáctico **Mathematiké**

El material didáctico **Mathematiké** ayuda a los estudiantes a aplicar sus sentidos para que en forma sencilla, amena y divertida entiendan y demuestren el concepto que estudian.

El uso continuo de los juegos, posibilita a los alumnos a desarrollar la habilidad en la aplicación de los conceptos.

## Objetivo del libro

Este libro de texto contiene un recorrido completo de toda la aritmética que un estudiante debe saber, antes de empezar la gran aventura del álgebra.

La columna vertebral del aritmética es lo que en este libro llamamos: La Dinámica Básica del Sistema de Numeración Decimal. Es muy importante que los estudiantes se apropien de todos los conceptos aquí presentados, que los apliquen creando los algoritmos y fórmulas, así como también desarrollen la habilidad en utilizarlos.

## Cómo está organizado el libro

Este libro corresponde al séptimo nivel de abstracción y ha sido organizado por conceptos y sus aplicaciones. Sugerimos que el libro sea recorrido en el orden en el que aparecen los capítulos. Sin embargo, si el maestro lo cree conveniente, una vez habiendo estudiado la Dinámica Básica del Sistema de Numeración Decimal, se pudieran estudiar varios conceptos simultáneamente.

## Niveles en la apropiación del conocimiento matemático

La Pedagogía de la Espiral Ascendente del Conocimiento para la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas, propone que el alumno vaya consolidando niveles de abstracción y el desarrollo de las habilidades que el nivel requiere. Para que los niños vayan penetrando en el fascinante mundo de la abstracción matemática, sin dar brincos y gozando el conocimiento que van adquiriendo, recomendamos fuertemente, no pasar al octavo nivel de abstracción hasta que el maestro ya ha verificado que los estudiantes están preparados para hacerlo.

## Nuestra página de Internet

Con el objeto de tener una vía de comunicación directa entre los maestros, los alumnos y el grupo de investigadores que hacemos esta propuesta educativa, el proyecto de investigación en la enseñanza de las matemáticas *Mathematiké* tiene una página en el internet: [www.mathematike.org](http://www.mathematike.org) En este sitio, presentamos con mucho más detalle la Pedagogía de la Espiral Ascendente del Conocimiento, la lista completa y actualizada del material didáctico y de los libros de texto y de trabajo. Es nuestro compromiso mantener siempre al día nuestra propuesta educativa, por lo cual, la comunicación con ustedes los maestros, nos es de vital importancia.