

Álgebra 1

Octavo Nivel de Abstracción



MORENO

Álgebra 1

Incluye proporciones, porcentaje e interés

Octavo nivel de abstracción

José Luis Moreno Aranda

Álgebra 1

Octavo nivel de abstracción

José Luis Moreno Aranda

Grupo Mathematiké, SA de CV

Prohibida su reproducción

Todos los derechos reservados

Impreso en México

2008

ISBN 978-970-93600-6-6

Contenido

Introducción

Niveles de abstracción	viii
Objetivo del libro	viii
Organización del libro	ix
Material didáctico	ix
Libro de texto Preálgebra	ix
Nuestra página en Internet	ix

Capítulo 1

Conjuntos

Definición de conjunto	13
Notación de conjunto	13
Representación gráfica de un conjunto	13
El conjunto Universo	14
El conjunto de los números naturales	14
Un elemento pertenece a un conjunto	14
Un conjunto que no tiene elementos se denomina conjunto vacío	14
A un conjunto que pertenece a otro conjunto se le llama subconjunto	15
Definición de variable	16
Notación de conjunto usando una letra	16
Unión de dos conjuntos	17
Intersección de dos conjuntos	17

Orden en la ejecución de las operaciones

Uso del paréntesis	20
El paréntesis indica multiplicación	20
El paréntesis indica el orden en el que debemos realizar las operaciones	21

Los números tienen su imagen	
En álgebra ya no restamos, sólo sumamos	23
La recta de los números reales	23
Los nueve dígitos, el cero y las columnas numéricas son el fundamento de las matemáticas	23
En álgebra el cero es la bisagra del espejo de la recta de los números reales	24
El signo menos (–) significa la imagen del número	25
El signo más (+) significa sumar el número	25
Multiplicación y división de números reales	
Regla de la multiplicación de signos	26
Regla de la división de signos	28
Multiplicación de números reales fraccionarios	29
División de números reales fraccionarios	30
Suma de números reales	
Las distancias también tienen imagen	32
Representamos las distancias con una flecha que se llama vector	32
Suma de distancias del mismo signo o de vectores en el mismo sentido	33
Suma de distancias negativas con distancias positivas o suma de vectores en sentido contrario	34
Suma algebraica de números fraccionarios	35
Suma algebraica de números fraccionarios de igual denominador	35
Suma algebraica de números fraccionarios de diferente denominador	36
Suma algebraica de números fraccionarios combinada con multiplicaciones y divisiones	39
Capítulo 2	
Las letras representan números y dimensiones	
Álgebra	45
Con las letras creamos fórmulas	45
Las letras representan dimensiones	46
Suma de dos o más letras diferentes	47
Suma de la misma letra varias veces	47
Suma de grupos de la misma letra o de vectores de la misma magnitud	48
El coeficiente de una letra	49
Primera aproximación a la ley conmutativa	49
Suma de grupos de letras diferentes	50
Procedimiento para sumar grupos de letras diferentes	50
Multiplicación de un número por una letra o un grupo de la misma letra	51
Suma combinada con la multiplicación de un número por un grupo de letras	52
Primera aproximación a la ley distributiva	53
Suma de grupos de letras combinada con la ley distributiva	54
Primera aproximación a la ley asociativa	54
La imagen de una magnitud o de una distancia	56
Suma de grupos diferentes de letras negativas	57
Suma de grupos de la misma letra positivos y negativos	58
Factorización del signo menos	59
Las letras representan áreas	
La multiplicación de dos letras	60
Multiplicación de una letra por sí misma	60
Multiplicación de dos letras diferentes	61
La imagen de un área	61
Suma del producto de dos letras o suma de áreas	61
Procedimiento para sumar áreas y vectores ambos positivos y negativos	63

Las letras representan volúmenes	
El producto de tres letras representa un volumen	65
Multiplicación de una letra por sí misma tres veces	65
La multiplicación de tres letras representa un prisma rectangular	66
La imagen de un volumen	66
Suma del producto de tres letras o suma de volúmenes	66
Procedimiento para sumar volúmenes, áreas y vectores positivos y negativos	68
Capítulo 3	
El concepto de ecuación	
Definición de ecuación	73
Solución o raíz de una ecuación	74
Ecuaciones sencillas que sólo tienen una solución	74
Propiedades básicas de una ecuación	
Las ecuaciones tienen constantes y variables o incógnitas	76
La ecuación no cambia si lo que le hacemos del lado izquierdo lo hacemos del lado derecho	77
Clasificación de las ecuaciones según el máximo exponente de la incógnita	78
Ecuaciones de primer grado o ecuaciones lineales	
Definición de ecuación de primer grado	79
Solución analítica de una ecuación de primer grado	79
Regla para los números y letras positivas y negativas que se encuentran sumando	81
Regla para los números y letras que se encuentran multiplicando y dividiendo	82
Procedimiento para resolver ecuaciones de primer grado	82
Gráfica de una ecuación lineal	
La variable dependiente y la variable independiente	86
La relación que guardan la variable dependiente y la independiente definen la gráfica	87
Sistema coordenado cartesiano	88
Pares ordenados (x, y)	89
Tabulación de una ecuación lineal	90
Problemas de aplicación de ecuaciones lineales	
El modelo matemático para resolver un problema	91
Problemas relacionados con números	92
Problemas misceláneos	94
Capítulo 4	
Proporciones	
Concepto de proporción	101
Rectas proporcionales	101
Figuras geométricas proporcionales o semejantes	102
Cuadrado	102
Rectángulo	103
Triángulo	104
Primera aplicación de las proporciones (Regla de tres)	106
Las proporciones son ecuaciones	106
Segunda aplicación de las proporciones (Razón)	107
Porcentaje	
Concepto de porcentaje	110
Conversión entre notación de fracción, notación decimal y porcentaje	111
Problemas de porcentaje	111
Conversión de notación decimal a notación de fracción	113

Promedio	
Concepto de promedio	116
Interés	
Porcentaje y capital	119
Interés compuesto	120
Apéndice 1	
Respuestas de los ejercicios	125
Apéndice 2	
Material didáctico complemento del libro	139

Introducción

Este libro de texto ha sido elaborado utilizando la *Pedagogía de San Ignacio de Loyola* aplicada a la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas. Esta pedagogía tiene como marco filosófico referencial una filosofía humanista, es decir, tiene como único objetivo promover las capacidades que identifican a un ser como humano: la imaginación, la inteligencia, la creatividad, la libertad, etcétera. Por lo cual el plan estratégico de este libro ha sido diseñado pensando únicamente en la promoción humana de los jóvenes que ahora transitan por los salones de clase.

La manera de proceder de San Ignacio en la apropiación de la experiencia de Dios¹, para ser adaptada al proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en el salón de clase, ha sido enriquecida utilizando la epistemología de Bernard Lonergan².

Esta metodología pedagógica consiste en un proceso de cinco pasos que se repiten cada vez que introducimos un nuevo concepto matemático. En la publicación *Pedagogía de San Ignacio Aplicada a la Enseñanza-Aprendizaje de las Matemáticas*³ se encuentra explicada en detalle esta novedosa metodología.

La estrategia pedagógica consiste en cinco pasos:

1. *Contextualizar el conocimiento.* Se define claramente qué concepto matemático vamos a estudiar y se coloca sobre la espiral ascendente del conocimiento, es decir, consiste en verificar que el estudiante se ha apropiado ya de los conceptos previos necesarios para saber con precisión cuál será el siguiente concepto que estudiaremos, ya que los conceptos no son entes aislados que aparecen de repente, sino que son como ladrillos que para formar una barda se colocan para soportar a los que estarán encima de ellos.
2. *Experimentar una realidad sensible utilizando los sentidos para permitirle al estudiante entender el concepto.* A través de una estrategia pedagógica adecuada, el estudiante utiliza sus sentidos: debe tocar, ver, oír, oler o gustar el concepto para que al extraer datos inquiera e imagine, y así pueda captar la unidad inteligible de esos datos y, por lo tanto, los entienda.
Usando la geometría como hilo conductor en el estudio de las matemáticas hemos podido utilizar imágenes y material didáctico manipulable para la apropiación de los principales conceptos de las matemáticas.
3. *Demostrar o verificar que lo entendido es cierto.* Cuando el alumno logra entender y, por lo tanto, puede formular con sus propias palabras el concepto, entonces se pregunta si lo que entendió es verdadero. Cuando el estudiante utiliza el conocimiento matemático que hasta este momento ha adquirido, demuestra el concepto y llega a la comprensión total.

4. *Aplicar el conocimiento adquirido y desarrollar la habilidad de usarlo en la solución de diferentes tipos de problemas.* Al aplicar el conocimiento, el alumno desarrolla o crea el algoritmo que le permite realizar operaciones o resolver problemas en forma ordenada y eficiente. Sin embargo, no basta sólo con que el alumno deduzca el algoritmo correspondiente sino que también es indispensable que desarrolle la habilidad y acumule la experiencia necesaria para el planteamiento y resolución de ese tipo de problemas.
5. *Evaluar lo aprendido y la forma como fue aprendido.* La evaluación se hace en dos sentidos. Primero se verifica si el estudiante se apropió del concepto matemático estudiado, así como desarrolló la habilidad y acumuló la experiencia necesaria en el planteamiento y resolución de problemas. Después se debe evaluar la forma en la cual hemos expuesto al alumno al concepto, es decir, nuestro propio trabajo como maestros.

Para darle coherencia al proceso de ir recorriendo el conocimiento matemático a través de los conceptos e ir apropiándonos de ellos mediante el uso de los sentidos, utilizamos la geometría como el hilo que conduce el conocimiento, es decir es como el alambre con el que construimos la espiral sobre la cual colocamos los conceptos.

La pedagogía de San Ignacio utiliza como estrategia la repetición, por lo cual el mismo concepto se aborda varias veces en el libro pero cada vez a un mayor nivel de complejidad y en combinación con otros conceptos.

Niveles de abstracción

Desde las primeras experiencias sensibles de un niño donde tocar objetos es el modo privilegiado que poco a poco lo va introduciendo en el maravilloso mundo de los números naturales, hasta la apropiación de los primeros símbolos matemáticos, representan el inicio de todo individuo en el apasionante ascenso del desarrollo de la imaginación o capacidad de abstracción a través de las matemáticas.

El punto de partida en la espiral del conocimiento matemático es claro y fácilmente cuantificable, sin embargo el punto final es incommensurable ya que el individuo llegará hasta donde quiera llegar y lo más maravilloso es que durante todo el tiempo que su limitada existencia dure siempre podrá seguir ascendiendo. No hay límites o barreras, el ascenso siempre continúa, el infinito es inalcanzable y la plenitud utopía. El decir que un individuo va aprendiendo y dominando el conocimiento matemático es equivalente a decir que su capacidad de abstracción va en aumento, ya que puede imaginar o abstraer realidades matemáticas cada vez más sofisticadas.

Este desarrollo de la capacidad de abstracción a través de la apropiación del conocimiento matemático lo podemos clasificar en cuatro grandes niveles de abstracción:

- Aritmética
- Álgebra
- Funciones y Geometría Analítica
- Matemáticas Infinitesimales

Objetivo del libro

El objetivo de este libro es cubrir el octavo nivel de abstracción en la espiral ascendente del conocimiento matemático. Este nivel comprende los conceptos básicos que estructuran el álgebra.

Entrar en esta nueva realidad matemática significa dar un brinco tanto cualitativo como cuantitativo, por lo cual es importante que lo hagamos haciendo primero una integración del conocimiento aritmético que hasta el momento hemos adquirido –primero al sexto niveles de abstracción–.

Una vez que hemos terminado la integración del conocimiento aritmético⁴ –séptimo nivel de abstracción– estamos listos para iniciar el estudio del fascinante mundo del álgebra.

En este libro descubrimos, que el universo numérico es mucho más amplio que los números positivos que estudiamos en aritmética, ya que ahora contamos con sus imágenes o números negativos. Usar letras amplía nuestro vocabulario matemático y el concepto de

ecuación, abre un nuevo horizonte que nos permite resolver un número infinito de problemas. Ya no hay límite para nuestra creatividad.

Organización del libro

El libro ha sido organizado por conceptos, niveles de abstracción y aplicaciones de los conceptos.

Álgebra básica. Octavo nivel de abstracción

Capítulos 1 al 3. Inicia con una breve presentación de la nomenclatura utilizada en la teoría de los conjuntos, la cual usamos a lo largo del texto. Apoyados en la original estrategia pedagógica del espejo de la recta de los números reales, estudiamos los números negativos y su aplicación en las tres operaciones básicas del álgebra: suma, multiplicación y división. Aplicamos este conocimiento al estudiar el concepto de ecuación, la solución de ecuaciones de primer grado y los problemas de aplicación de estas ecuaciones.

Conceptos selectos de matemáticas. Aplicación del concepto de ecuación

Capítulo 4. Utilizando el concepto de ecuación y las estrategias matemáticas aprendidas, resolvemos problemas de: proporciones, porcentaje, promedio e interés.

Material didáctico

Este libro de texto viene acompañado de un paquete de material didáctico, que nos ayuda a entender y demostrar los conceptos de los números negativos, la suma algebraica y el uso de las letras.

Durante el desarrollo del texto se explica la forma en la cual debes utilizarlos.

Libro de texto Preálgebra⁴

El libro de texto Preálgebra –séptimo nivel de abstracción– cubre la integración del conocimiento aritmético.

Al igual que este libro, el texto PreÁlgebra está también organizado por conceptos y niveles de abstracción y viene acompañado del material didáctico necesario para entender y demostrar los principales conceptos aritméticos.

Nuestra página en Internet

Con el objetivo de tener una vía de comunicación directa entre los maestros, los alumnos y el grupo de investigadores que hacemos esta propuesta educativa, el proyecto de investigación en la enseñanza de las matemáticas *Mathematiké* tiene una página en Internet: www.mathematike.org. En este sitio presentamos con más detalle la pedagogía de San Ignacio, así como la lista completa y actualizada del material didáctico y de los libros de texto y de trabajo. Es nuestro compromiso mantener siempre al día nuestra propuesta educativa, por lo que la comunicación con ustedes los maestros y alumnos es de vital importancia.

1. Obras de San Ignacio de Loyola. Biblioteca de autores cristianos, Madrid. 1997.
2. Lonergan, Bernard, *Collected works of Bernard Lonergan*, Insight, vol 3, University of Toronto Press, 1997.
3. Moreno Aranda, José Luis, *Pedagogía de San Ignacio aplicada a la enseñanza de las matemáticas*, Grupo Mathematiké, 2003.
4. Moreno Aranda, José Luis, *Preálgebra*, 1ª ed, Grupo Mathematiké, SA de CV, México, 2006.