

Álgebra 2

Noveno Nivel de Abstracción



MORENO

Álgebra 2

Incluye Estadística y Probabilidad

Noveno Nivel de Abstracción

José Luis Moreno Aranda

Álgebra 2
Incluye Estadística y Probabilidad

Noveno Nivel de Abstracción
José Luis Moreno Aranda

Grupo Mathematiké, SA de CV
Prohibido Reproducir
Todos los Derechos Reservados
Impreso en México
2009

ISBN 978-970-93600-6-6

Contenido

Introducción

Niveles de abstracción	vii
Objetivo del libro	vii
Organización del libro	viii
Material didáctico	viii
Libro de texto Álgebra 1. Octavo nivel	viii
Nuestra página en Internet	viii

Capítulo 1

Álgebra de Más de Tres Dimensiones

Las letras adquieren vida propia en el álgebra	11
Las letras pueden representar más de tres dimensiones	11

Potencias Algebraicas

Nomenclatura de potencia algebraica	12
Nomenclatura de potencia algebraica con coeficiente diferente de uno	12
Suma de potencias algebraicas	13
Multiplicación de potencias algebraicas que tienen la misma base	15
Procedimiento cuando los multiplicandos son una combinación de potencias de bases iguales y distintas	15
Procedimiento cuando los multiplicandos son una combinación de potencias de bases iguales y distintas con coeficientes diferentes de uno	15
Potencia de una multiplicación algebraica	17
Potencia de una potencia	19
Potencia de un cociente	22
Simplificación de potencias algebraicas que tienen la misma base	23
División de potencias algebraicas que tienen la misma base	26
Multiplicar el numerador y el denominador por la misma cantidad diferente de cero no altera el cociente	28

Cuadrado y Raíz Cuadrada

Definición de cuadrado	30
Definición de raíz cuadrada	31
Propiedades de la raíz cuadrada	33

Capítulo 2

Factorización

La ley distributiva de la multiplicación sobre la suma	41
Factorización de términos semejantes	42
Procedimiento para la factorización de términos	43
Simplificación de términos semejantes en un cociente de sumandos	44

Productos Notables

Potencias de un binomio	47
Binomio al cuadrado	47
Suma de un binomio al cuadrado	48
Diferencia de un binomio al cuadrado	48
El binomio al cuadrado es un producto notable	48
Desarrollo de la suma de un binomio al cuadrado	48
Factorización de un binomio al cuadrado	51
Binomio al cubo	53
Suma de un binomio al cubo	53
Diferencia de un binomio al cubo	53
El binomio al cubo es un producto notable	54
Multiplicación de polinomios	56
Potencias de un polinomio	57
La diferencia de cuadrados es un producto notable	58
Demostración algebraica de la diferencia de cuadrados	58
Factorización de una diferencia de cuadrados	59
La suma de cubos es un producto notable	60
Demostración algebraica de la suma de cubos	60
La diferencia de cubos es un producto notable	61
Demostración algebraica de la diferencia de cubos	61
La multiplicación de dos binomios es un producto notable	63
Desarrollo de la multiplicación de dos binomios cuando el coeficiente de la variable es uno	64
Factorización de la multiplicación de dos binomios cuando el coeficiente de la variable es uno	64
Desarrollo de la multiplicación de dos binomios cuando el coeficiente de la variable no es uno	66
Factorización de la multiplicación de dos binomios cuando el coeficiente de la variable no es uno	66

Capítulo 3

División de Polinomios

División de un polinomio entre un monomio	73
División de un polinomio entre otro polinomio	75
Algoritmo para dividir un polinomio entre otro polinomio	75
División sintética	78
Procedimiento para realizar la división sintética	78
Condiciones para realizar la división sintética	79

Multiplicación de Fracciones Algebraicas

Algoritmo de la multiplicación de fracciones	80
--	----

División de Fracciones Algebraicas

Hay dos formas de expresar y resolver la división de fracciones	83
La ley de la tortilla	83
División de fracciones combinada con la multiplicación de fracciones	85

Suma de Fracciones Algebraicas

Suma de fracciones cuando los denominadores son iguales	89
Suma de fracciones cuando los denominadores no son iguales	91
Mínimo común múltiple cuando las expresiones algebraicas no son factorizables	92
Mínimo común múltiple de polinomios cuando las expresiones algebraicas son factorizables	95
Mínimo común múltiple de polinomios cuando las expresiones algebraicas pueden descomponerse en factores	96
Suma de fracciones cuando los denominadores son diferentes	100
Suma de fracciones combinada con división de fracciones	104
Operaciones de expresiones algebraicas combinadas	107

Capítulo 4

Ecuaciones de Primer Grado

Solución de una ecuación	113
Solución de una ecuación de primer grado	113
Las ecuaciones tienen constantes y variables o incógnitas	114
Propiedad básica de una ecuación	114
Solución de una ecuación de primer grado	115

Reglas para resolver ecuaciones de primer grado	116
Problemas de Aplicación de Ecuaciones Lineales	
Procedimiento para resolver problemas de aplicación	119
Capítulo 5	
Estadística	
Recolección y Organización de Datos	
Concepto de estadística	125
Recolección y organización de datos	125
Análisis de Datos	
Medición de los datos	127
Medidas de tendencia central	127
Medidas de dispersión	129
Presentación de los Datos	
Gráficas de datos	131
Introducción a la Teoría de la Probabilidad	
Permutaciones	
Concepto de permutación	137
Algoritmo para calcular permutaciones	138
Combinaciones	
Concepto de combinación	140
Algoritmo para calcular combinaciones	141
Probabilidad	
Concepto de probabilidad	144
Definición de probabilidad	144
Aplicación de permutaciones y combinaciones para calcular la probabilidad	146
Apéndice 1	
Respuestas de las Series de Ejercicios	
Capítulo 1	151
Capítulo 2	158
Capítulo 3	166
Capítulo 4	174
Capítulo 5	174
Apéndice 2	
Material Didáctico Complemento del Libro	
Diecinueve cartulinas	177

Introducción

Este libro de texto ha sido elaborado utilizando la *Pedagogía de San Ignacio de Loyola* aplicada a la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas. Esta pedagogía tiene como marco filosófico referencial una filosofía humanista, es decir, tiene como único objetivo promover las capacidades que identifican a un ser como humano: la imaginación, la inteligencia, la creatividad, la libertad, etcétera. Por lo cual el plan estratégico de este libro ha sido diseñado pensando únicamente en la promoción humana de los jóvenes que ahora transitan por los salones de clase.

La manera de proceder de San Ignacio en la apropiación de la experiencia de Dios¹, para ser adaptada al proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en el salón de clase, ha sido enriquecida utilizando la epistemología de Bernard Lonergan².

Esta metodología pedagógica consiste en un proceso de cinco pasos que se repiten cada vez que introducimos un nuevo concepto matemático. En la publicación *Pedagogía de San Ignacio Aplicada a la Enseñanza-Aprendizaje de las Matemáticas*³ se encuentra explicada en detalle esta novedosa metodología.

La estrategia pedagógica consiste en cinco pasos:

1. *Contextualizar el conocimiento.* Se define claramente qué concepto matemático vamos a estudiar y se coloca sobre la espiral ascendente del conocimiento, es decir, consiste en verificar que el estudiante se ha apropiado ya de los conceptos previos necesarios para saber con precisión cuál será el siguiente concepto que estudiaremos, ya que los conceptos no son entes aislados que aparecen de repente, sino que son como ladrillos que para formar una barda se colocan para soportar a los que estarán encima de ellos.
2. *Experimentar una realidad sensible utilizando los sentidos para permitirle al estudiante entender el concepto.* A través de una estrategia pedagógica adecuada, el estudiante utiliza sus sentidos: debe tocar, ver, oír, oler o gustar el concepto para que al extraer datos inquiera e imagine, y así pueda captar la unidad inteligible de esos datos y, por lo tanto, los entienda.
Usando la geometría como hilo conductor en el estudio de las matemáticas hemos podido utilizar imágenes y material didáctico manipulable para la apropiación de los principales conceptos de las matemáticas.
3. *Demostrar o verificar que lo entendido es cierto.* Cuando el alumno logra entender y, por lo tanto, puede formular con sus propias palabras el concepto, entonces se pregunta si lo que entendió es verdadero. Cuando el estudiante utiliza el conocimiento matemático que hasta este momento ha adquirido, demuestra el concepto y llega a la comprensión total.

4. *Aplicar el conocimiento adquirido y desarrollar la habilidad de usarlo en la solución de diferentes tipos de problemas.* Al aplicar el conocimiento, el alumno desarrolla o crea el algoritmo que le permite realizar operaciones o resolver problemas en forma ordenada y eficiente. Sin embargo, no basta sólo con que el alumno deduzca el algoritmo correspondiente sino que también es indispensable que desarrolle la habilidad y acumule la experiencia necesaria para el planteamiento y resolución de ese tipo de problemas.
5. *Evaluar lo aprendido y la forma como fue aprendido.* La evaluación se hace en dos sentidos. Primero se verifica si el estudiante se apropió del concepto matemático estudiado, así como desarrolló la habilidad y acumuló la experiencia necesaria en el planteamiento y resolución de problemas. Después se debe evaluar la forma en la cual hemos expuesto al alumno al concepto, es decir, nuestro propio trabajo como maestros.

Para darle coherencia al proceso de ir recorriendo el conocimiento matemático a través de los conceptos e ir apropiándonos de ellos mediante el uso de los sentidos, utilizamos la geometría como el hilo que conduce el conocimiento, es decir es como el alambre con el que construimos la espiral sobre la cual colocamos los conceptos.

La pedagogía de San Ignacio utiliza como estrategia la repetición, por lo cual el mismo concepto se aborda varias veces en el libro pero cada vez a un mayor nivel de complejidad y en combinación con otros conceptos.

Niveles de abstracción

Desde las primeras experiencias sensibles de un niño donde tocar objetos es el modo privilegiado que poco a poco lo va introduciendo en el maravilloso mundo de los números naturales, hasta la apropiación de los primeros símbolos matemáticos, representan el inicio de todo individuo en el apasionante ascenso del desarrollo de la imaginación o capacidad de abstracción a través de las matemáticas.

El punto de partida en la espiral del conocimiento matemático es claro y fácilmente cuantificable, sin embargo el punto final es inconmensurable ya que el individuo llegará hasta donde quiera llegar y lo más maravilloso es que durante todo el tiempo que su limitada existencia dure siempre podrá seguir ascendiendo. No hay límites o barreras, el ascenso siempre continúa, el infinito es inalcanzable y la plenitud utopía. El decir que un individuo va aprendiendo y dominando el conocimiento matemático es equivalente a decir que su capacidad de abstracción va en aumento, ya que puede imaginar o abstraer realidades matemáticas cada vez más sofisticadas.

Este desarrollo de la capacidad de abstracción a través de la apropiación del conocimiento matemático lo podemos clasificar en cuatro grandes niveles de abstracción:

- Aritmética
- Álgebra
- Funciones y Geometría Analítica
- Matemáticas Infinitesimales

Objetivo del libro

El objetivo de este libro es cubrir el noveno nivel de abstracción en la espiral ascendente del conocimiento matemático. En este nivel, aplicamos los conceptos básicos del álgebra que llamamos de tres dimensiones, para crear el universo algebraico de n dimensiones.

Usando el conocimiento adquirido, factorizamos expresiones algebraicas y estudiamos los productos notables, en dos y tres dimensiones.

Resolvemos problemas de fracciones algebraicas, en los cuales debemos utilizar las habilidades algebraicas para factorizar expresiones que hemos adquirido.

Avanzamos en el conocimiento de las ecuaciones de primer grado y sus problemas de aplicación.

Aplicamos nuestra habilidad para resolver fracciones algebraicas, realizamos ecuaciones de primer grado, utilizando el concepto de ecuación.

Para complementar el conocimiento matemático, estudiamos los conceptos básicos de estadística, combinaciones, permutaciones y probabilidad.

Organización del libro

El libro ha sido organizado por conceptos, niveles de abstracción y aplicaciones de los conceptos.

Álgebra básica. Noveno nivel de abstracción

Capítulo 1. En el octavo nivel, construimos los conceptos básicos del álgebra utilizando cartulinas de material didáctico, ya que trabajamos en tres dimensiones. Ahora generalizamos este conocimiento y creamos el álgebra de n dimensiones.

Capítulo 2. La factorización y los productos notables, son conceptos y estrategias muy útiles para solución de problemas algebraicos, incluyendo las ecuaciones de segundo.

Capítulo 3. Ahora estamos listos para estudiar las fracciones algebraicas, en las cuales utilizamos los conceptos y estrategias estudiados en el octavo nivel y los capítulos 1 y 2 de este libro.

Capítulo 4. Utilizando el concepto de ecuación, que por primera vez estudiamos en el octavo nivel de abstracción, y la habilidad que hemos adquirido para manipular fracciones algebraicas, resolvemos ecuaciones de primer grado.

Conceptos selectos de matemáticas.

Capítulo 5. Estadística y probabilidad, incluyendo los conceptos de las combinaciones y permutaciones.

Material didáctico

Este libro de texto viene acompañado de un paquete de material didáctico, que nos ayuda a entender y demostrar los productos notables en dos y tres dimensiones.

Durante el desarrollo del texto se explica la forma en la cual debe ser utilizado.

Libro de texto Álgebra 1. Octavo nivel⁴

El libro de texto Álgebra 1 de octavo nivel cubre los conceptos básicos y sus aplicaciones requeridos para abordar el conocimiento de este libro.

Al igual que este libro, el texto Álgebra de octavo nivel está también organizado por conceptos y niveles de abstracción y viene acompañado del material didáctico necesario para entender y demostrar los principales conceptos algebraicos.

Nuestra página en Internet

Con el objetivo de tener una vía de comunicación directa entre los maestros, los alumnos y el grupo de investigadores que hacemos esta propuesta educativa, el proyecto de investigación en la enseñanza de las matemáticas *Mathematiké* tiene una página en Internet: www.mathematike.org. En este sitio presentamos con más detalle la pedagogía de San Ignacio, así como la lista completa y actualizada del material didáctico y de los libros de texto y de trabajo. Es nuestro compromiso mantener siempre al día nuestra propuesta educativa, por lo que la comunicación con ustedes los maestros y alumnos es de vital importancia.

1. Obras de San Ignacio de Loyola. Biblioteca de autores cristianos, Madrid. 1997.
2. Lonergan, Bernard, *Collected works of Bernard Lonergan*, Insight, vol 3, University of Toronto Press, 1997.
3. Moreno Aranda, José Luis, *Pedagogía de San Ignacio aplicada a la enseñanza de las matemáticas*, Grupo Mathematiké, 2003.
4. Moreno Aranda, José Luis, *Álgebra. Octavo nivel de abstracción*. 1ª ed, Grupo Mathematiké, SA de CV, México, 2007.