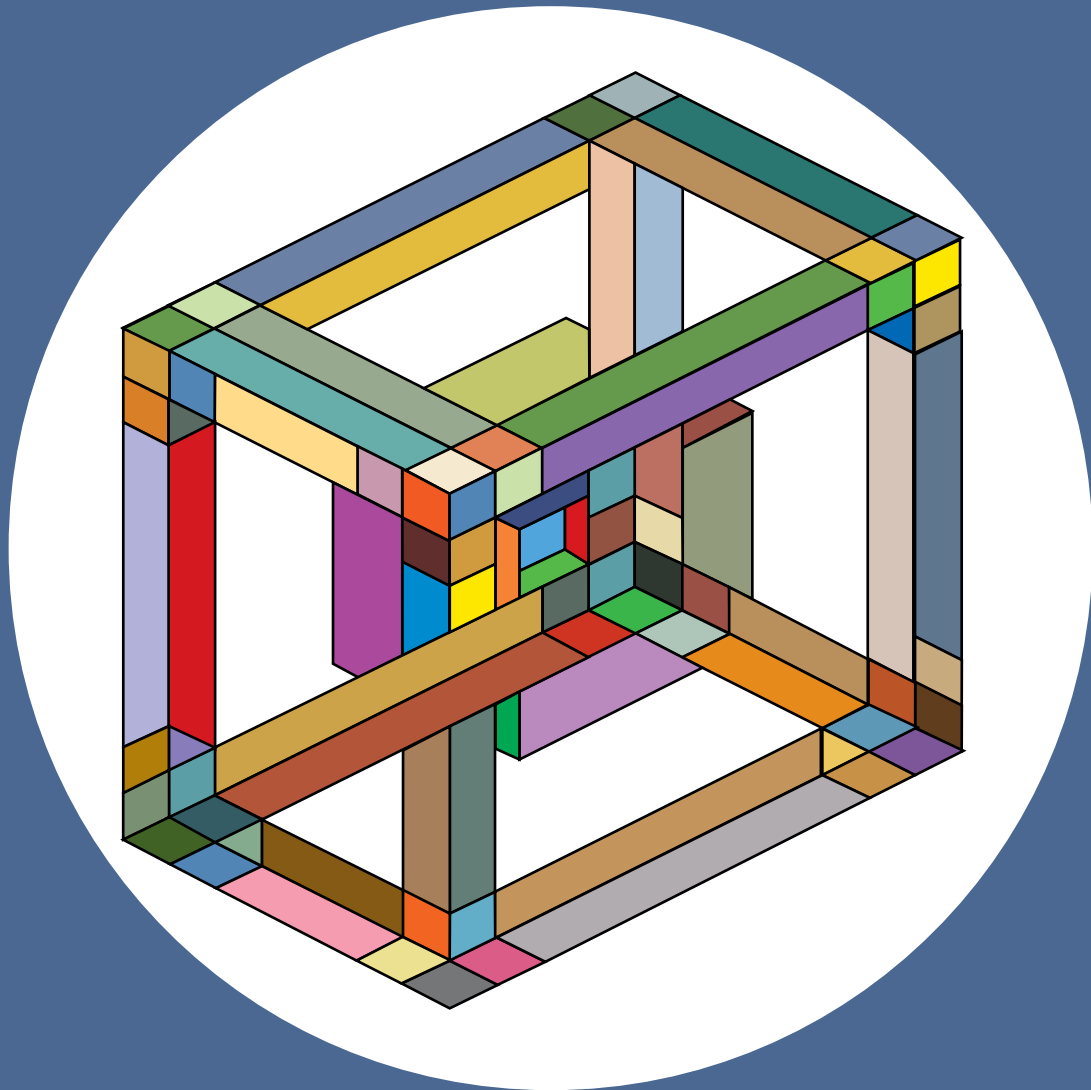


Álgebra

Integración del Conocimiento
Algebraico
Décimo Nivel de Abstracción



MORENO

Integración del Conocimiento Algebraico

Décimo Nivel de Abstracción

José Luis Moreno Aranda



Integración del Conocimiento Algebraico

Décimo Nivel de Abstracción

José Luis Moreno Aranda

Grupo Mathematiké, SA de CV

Prohibido Reproducir

Todos los Derechos Reservados

Impreso en México

2011

Contenido

Introducción

La Pedagogía de la Espiral Ascendente Para la Enseñanza de las Matemáticas	viii
Material didáctico Mathematiké	ix
Objetivo del libro	ix
Cómo está organizado el libro	ix
Niveles en la apropiación del conocimiento matemático	ix
Nuestra página de Internet	ix

Capítulo 1

Conjuntos

Definición de conjunto	13
Notación de conjunto	13
Representación de los elementos de un conjunto	13
Conjunto universo	13
Conjunto de los números naturales y enteros positivos	13
Un elemento pertenece a un conjunto	14
El conjunto vacío	14
Subconjunto	14
Definición de variable	15
Notación de conjunto usando una variable	15
Unión de conjuntos	15
Intersección de conjuntos	15

Orden en la Ejecución de las Operaciones

Uso del paréntesis	18
El paréntesis indica multiplicación	18
El paréntesis indica el orden en el que debemos realizar las operaciones	18

Los Números Tienen su Imagen

En álgebra ya no restamos, solamente sumamos	20
La recta de los números reales	20
En álgebra el cero es la bisagra del espejo de la recta de los números reales	20
El signo menos (-) significa la imagen del número	21
El signo más (+) significa sumar el número	22
Ejercicios con el material didáctico	22

Multiplicación y División de Números Reales

Buscar las imágenes a espejo de los números reales	23
Regla de la multiplicación de signos	23
Regla de la división de signos	25
El signo negativo en los números fraccionarios	25
Multiplicación de números reales fraccionarios	26
División de números reales fraccionarios	26

Suma de Números Reales

Las distancias también tienen imagen	28
Representamos las distancias con una flecha que se llama vector	28
Suma de distancias del mismo signo o de vectores en el mismo sentido	28
Suma de distancias negativas con distancias positivas o suma de vectores en sentido contrario	29
Ejercicios con el material didáctico	30
Suma algebraica de números fraccionarios	31
Suma algebraica de números fraccionarios de igual denominador	31
Suma algebraica de números fraccionarios de diferente denominador	32
Suma algebraica de números fraccionarios combinada con multiplicaciones y divisiones	34

Capítulo 2

Las Letras Representan Números y Dimensiones

Álgebra	39
Con las letras creamos fórmulas	39
Las letras representan dimensiones	40
Suma de dos o más letras diferentes	40
Suma de la misma letra varias veces	41
Suma de grupos de la misma letra o de vectores de la misma magnitud	41
El coeficiente de una letra	41
La ley conmutativa	42
Suma de grupos de letras diferentes	42
Procedimiento para sumar grupos de letras diferentes	42
Multiplicación de un número por una letra o un grupo de la misma letra	43
Suma combinada con la multiplicación de un número por un grupo de letras	43
La ley distributiva	44
Suma de grupos de letras combinada con la ley distributiva	45
La ley asociativa	45
La imagen de una magnitud o de una distancia	46
Suma de grupos diferentes de letras negativas	47
Suma de grupos de la misma letra positivos y negativos	48
Factorización del signo menos	48

Las Letras Representan Áreas

La multiplicación de dos letras	51
Multiplicación de una letra por sí misma	51
Multiplicación de dos letras diferentes	51
La imagen de un área	51
Suma del producto de dos letras o suma de áreas	52
Procedimiento para sumar áreas y vectores ambos positivos y negativos	54

Las Letras Representan Volúmenes

El producto de tres letras representa un volumen	56
Multiplicación de una letra por sí misma tres veces	56
La multiplicación de tres letras representa un prisma rectangular	56
La imagen de un volumen	56
Suma del producto de tres letras o suma de volúmenes	57
Procedimiento para sumar volúmenes, áreas y vectores positivos y negativos	58

Capítulo 3

Álgebra de Más de Tres Dimensiones

Las letras adquieren vida propia en el álgebra	63
Las letras pueden representar más de tres dimensiones	63

Potencias Algebraicas

Nomenclatura de potencia algebraica	64
Nomenclatura de potencia algebraica con coeficiente diferente de uno	64
Suma de potencias algebraicas	65
Multiplicación de potencias algebraicas que tienen la misma base	66
Procedimiento cuando los multiplicandos son una combinación de potencias de bases iguales y distintas	66
Procedimiento cuando los multiplicandos tienen potencias de bases iguales y distintas con coeficientes diferentes de uno	67

Potencia de una multiplicación algebraica	68
Potencia de una potencia	70
Potencia de un cociente	72
Simplificación de potencias algebraicas que tienen la misma base	74
División de potencias algebraicas que tienen la misma base	76
Multiplicar el numerador y el denominador por la misma cantidad diferente de cero no altera el cociente	77
Cuadrado y Raíz Cuadrada	
Definición de cuadrado	79
Nomenclatura utilizada en la raíz cuadrada	80
Definición de raíz cuadrada	80
Número cuadrado perfecto	81
Propiedades de la raíz cuadrada	81
Capítulo 4	
Factorización	
La ley distributiva de la multiplicación sobre la suma	87
Factorización de términos semejantes	88
Procedimiento para la factorización de términos	88
Simplificación de términos semejantes en un cociente de sumandos	90
Productos Notables	
Potencia de un binomio	92
Binomio al cuadrado	92
Suma de un binomio al cuadrado	92
Diferencia de un binomio al cuadrado	92
El binomio al cuadrado es un producto notable	93
Desarrollo de la suma y la diferencia de un binomio al cuadrado	93
Ejercicios con el material didáctico	93
Factorización de un binomio al cuadrado	95
Binomio al cubo	96
Suma de un binomio al cubo	96
Diferencia de un binomio al cubo	96
El binomio al cubo es un producto notable	97
Desarrollo de la suma y la diferencia de un binomio al cubo	97
Ejercicios con el material didáctico	97
Multiplicación de polinomios	99
Potencias de un polinomio	99
La diferencia de cuadrados es un producto notable	100
Demostración algebraica de la diferencia de cuadrados	100
Ejercicios con el material didáctico	100
Factorización de una diferencia de cuadrados	101
La suma y diferencia de cubos son un producto notable	102
Desarrollo de la suma y la diferencia de cubos	102
Demostración algebraica de la suma y diferencia de cubos	102
Ejercicios con el material didáctico	102
La multiplicación de dos binomios es un producto notable	104
Desarrollo de la multiplicación de dos binomios cuando el coeficiente de la variable es uno	104
Factorización de la multiplicación de dos binomios cuando el coeficiente de la variable es uno	105
Desarrollo de la multiplicación de dos binomios cuando el coeficiente de la variable no es uno	106
Factorización de la multiplicación de dos binomios cuando el coeficiente de la variable no es uno	107
Capítulo 5	
División de Polinomios	
División de un polinomio entre un monomio	113
División de un polinomio entre otro polinomio	114
Algoritmo para dividir un polinomio entre otro polinomio	114
División sintética	117
Procedimiento para realizar la división sintética	117
Condiciones para realizar la división sintética	118

Multiplicación de Fracciones Algebraicas	
Algoritmo de la multiplicación de fracciones	120
División de Fracciones Algebraicas	
Hay dos formas de expresar y resolver la división de fracciones	122
Notación de división. La ley de la tortilla	122
Notación de fracción	122
Demostración de la división de fracciones	122
División de fracciones combinada con la multiplicación de fracciones	124
Suma de Fracciones Algebraicas	
Suma de fracciones cuando los denominadores son iguales	126
Mínimo común múltiplo	127
Mínimo común múltiplo de expresiones algebraicas	128
Suma de fracciones cuando los denominadores no son iguales	133
Suma de fracciones combinada con división de fracciones	136
Operaciones de expresiones algebraicas combinadas	138
Capítulo 6	
Concepto de Ecuación	
Concepto de ecuación	145
Constantes, variables e incógnitas	145
Solución o raíz de una ecuación	145
La ecuación no cambia si la operación algebraica que hacemos del lado derecho la hacemos también del lado izquierdo	147
Solución de una ecuación	149
Reglas para resolver ecuaciones	150
Ecuaciones en las cuales hay más de una letra o variable	151
Clasificación de las ecuaciones según el máximo exponente de la incógnita	152
Ecuaciones Lineales	
Definición de ecuación de primer grado o lineal	154
Problemas de Aplicación de Ecuaciones Lineales	
Procedimiento para resolver problemas de aplicación	157
Problemas relacionados con números	157
Problemas misceláneos	159
Capítulo 7	
Ecuaciones de Segundo Grado	
Definición de una ecuación de segundo grado o cuadrática	169
Teorema del factor cero	169
Solución o raíces de una ecuación de segundo grado	169
Tipos de solución de una ecuación de segundo grado	169
Casos para la solución de una ecuación de segundo grado	170
Solución de una ecuación de segundo grado sin término independiente	170
Solución de una ecuación de segundo grado sin término lineal	171
Solución de una ecuación de segundo grado cuando la ecuación puede ser factorizada en dos binomios	172
Solución de una ecuación de segundo grado completando el cuadrado para poder factorizarla	173
Solución de una ecuación de segundo grado usando la fórmula general	174
Problemas de Aplicación	
Procedimiento para la solución de problemas de aplicación	177
Gráfica de una Ecuación	
Variables dependientes y variables independientes	182
La relación que guardan la variable dependiente y la independiente definen la gráfica	182
Sistema coordenado cartesiano	182
Pares ordenados (x, y)	183
Tabulación de una ecuación	183
Gráfica de una ecuación de primer grado	184
Gráfica de una ecuación de segundo grado	185

Capítulo 8

Sistemas de Ecuaciones

Definición de un sistema de ecuaciones	189
Sistemas de ecuaciones de dos variables	189
Sistemas de ecuaciones de tres variables	189
Solución gráfica de un sistemas de ecuaciones	189

Sistemas de Dos Ecuaciones

Concepto utilizado en la solución de sistemas de ecuaciones	192
Método de sustitución para resolver un sistema de dos ecuaciones	192
Método de igualación para resolver un sistema de dos ecuaciones	195
Método de suma o eliminación para resolver un sistema de ecuaciones	198

Sistemas de Tres Ecuaciones

Combinación de los tres métodos de solución de un sistema de ecuaciones	201
Solución de un sistema de tres ecuaciones	201

Problemas de Aplicación

Problemas de aplicación de sistemas de ecuaciones con dos incógnitas	204
--	-----

Capítulo 9

Desigualdades

Concepto de desigualdad	213
Las desigualdades en la recta de los números reales	213
Las igualdades o ecuaciones	213
Las desigualdades con letras	213
Notación utilizada en las desigualdades	214
Propiedades de las desigualdades	216

Solución de Una Desigualdad de Primer Grado

Solución de desigualdades de primer grado o lineales	217
--	-----

Problemas de Aplicación

Problemas de aplicación de desigualdades lineales	219
---	-----

Sistemas de Desigualdades Lineales

Definición de sistemas de desigualdades lineales	221
Solución de sistemas de desigualdades lineales	221

Valor Absoluto

Definición de valor absoluto	223
Solución de ecuaciones con valor absoluto	223

Apéndice 1

Respuestas de los Ejercicios

Capítulo 1	227
Capítulo 2	230
Capítulo 3	233
Capítulo 4	239
Capítulo 5	246
Capítulo 6	252
Capítulo 7	255
Capítulo 8	257
Capítulo 9	258

Apéndice 2

Material Didáctico Complemento del Libro

Cartulinas	263
------------	-----

Introducción

La Pedagogía de la Espiral Ascendente Para la Enseñanza de las Matemáticas

Este libro de texto ha sido elaborado utilizando la *Pedagogía de la Espiral Ascendente* para la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas. Esta pedagogía tiene como marco filosófico referencial una filosofía humanista, es decir, tiene como único objetivo promover las capacidades que identifican a un ser como humano: la imaginación, la inteligencia, la creatividad, la libertad, etcétera. Por lo cual, el plan estratégico de este libro ha sido diseñado pensando únicamente en la promoción humana de los estudiantes que ahora transitan por los salones de clase.

Esta pedagogía ha sido enriquecida utilizando la epistemología de Bernard Lonergan¹.

Esta metodología pedagógica consiste en un proceso de cinco pasos que se repiten cada vez que introducimos un nuevo concepto matemático. En nuestra página de Internet se encuentra una explicación detallada de esta novedosa metodología.

La estrategia pedagógica consiste de cinco pasos:

1. *Contextualizar el conocimiento.* Explicitar claramente qué concepto matemático vamos a estudiar y colocarlo sobre la espiral ascendente del conocimiento. Verificar que el estudiante ya se ha apropiado de los conceptos previos necesarios y saber con precisión cuál será el siguiente concepto que estudiaremos, ya que los conceptos no son entes aislados que aparecen de repente, sino que son como ladrillos, que para poder formar una barda, se colocan para soportar a los que estarán encima de ellos.
2. *Experimentar una realidad sensible utilizando los sentidos, para permitirle al estudiante entender el concepto.* A través de una estrategia pedagógica adecuada, el estudiante utilizando sus sentidos, debe tocar, ver, oír, oler o gustar el concepto, para que extrayendo datos inquiera e imagine y así pueda captar la unidad inteligible de esos datos y por lo tanto entender.
Usando la geometría como hilo conductor en el estudio de las matemáticas, hemos podido utilizar imágenes y material didáctico manipulable para la apropiación de los principales conceptos de las matemáticas.
3. *Demostrar o verificar que lo entendido es cierto.* Cuando el alumno ha entendido y por lo tanto, ha podido formular con sus propias palabras el concepto, entonces se pregunta si lo que ha entendido es verdadero. El estudiante utilizando el conocimiento matemático que hasta este momento ha adquirido, demuestra el concepto dándose así en él o ella la comprensión total.
4. *Aplicar el conocimiento adquirido y desarrollar la habilidad al usarlo en la solución de diferentes tipos de problemas.* Al aplicar el conocimiento, el alumno desarrolla o crea el algoritmo que le permite realizar operaciones o resolver problemas en forma ordenada y eficiente. Sin embargo, no basta sólo con que el alumno construya el algoritmo correspondiente, sino que también, es indispensable que desarrolle la habilidad y acumule la experiencia necesaria para el planteamiento y resolución de ese tipo de problemas.

5. *Evaluar lo aprendido y la forma como fue aprendido.* La evaluación la hacemos en dos sentidos. Primero, debemos verificar si el estudiante se ha apropiado del concepto matemático estudiado y ha desarrollado la habilidad y acumulado la experiencia necesaria en el planteamiento y resolución de problemas. Después, debemos evaluar la forma en la cual hemos expuesto al alumno al concepto, es decir, nuestro propio trabajo como maestros.

Material didáctico *Mathematiké*

El material didáctico *Mathematiké* ayuda a los estudiantes a aplicar sus sentidos para que en forma sencilla, amena y divertida entiendan y demuestren el concepto que estudian.

El uso continuo de los juegos, posibilita a los alumnos a desarrollar la habilidad en la aplicación de los conceptos.

Objetivo del libro

Este libro de texto contiene un recorrido completo de toda el álgebra básica que un estudiante debe saber, antes de empezar la gran aventura del álgebra intermedia.

Es muy importante que los estudiantes se apropien de todos los conceptos aquí presentados, que los apliquen creando los algoritmos y fórmulas, así como también desarrollen la habilidad en utilizarlos.

Cómo está organizado el libro

Este libro corresponde al décimo nivel de abstracción y ha sido organizado siguiendo la lógica y dinámica de la espiral ascendente del conocimiento. Sugerimos que el libro sea recorrido en el orden en el que aparecen los capítulos.

Niveles en la apropiación del conocimiento matemático

La Pedagogía de la Espiral Ascendente del Conocimiento para la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas, propone que el alumno vaya consolidando niveles de abstracción y el desarrollo de las habilidades que el nivel requiere. Para que los estudiantes vayan penetrando en el fascinante mundo de la abstracción matemática, sin dar brincos y gozando el conocimiento que van adquiriendo, recomendamos fuertemente, no pasar al siguiente nivel de abstracción hasta que el maestro ya ha verificado que los alumnos están preparados para hacerlo.

Nuestra página de Internet

Con el objeto de tener una vía de comunicación directa entre los maestros, los alumnos y el grupo de investigadores que hacemos esta propuesta educativa, el proyecto de investigación en la enseñanza de las matemáticas *Mathematiké* tiene una página en el internet: www.mathematike.org En este sitio, presentamos con mucho más detalle la Pedagogía de la Espiral Ascendente del Conocimiento, la lista completa y actualizada del material didáctico y de los libros de texto y de trabajo. Es nuestro compromiso mantener siempre al día nuestra propuesta educativa, por lo cual, la comunicación con ustedes los maestros, nos es de vital importancia.