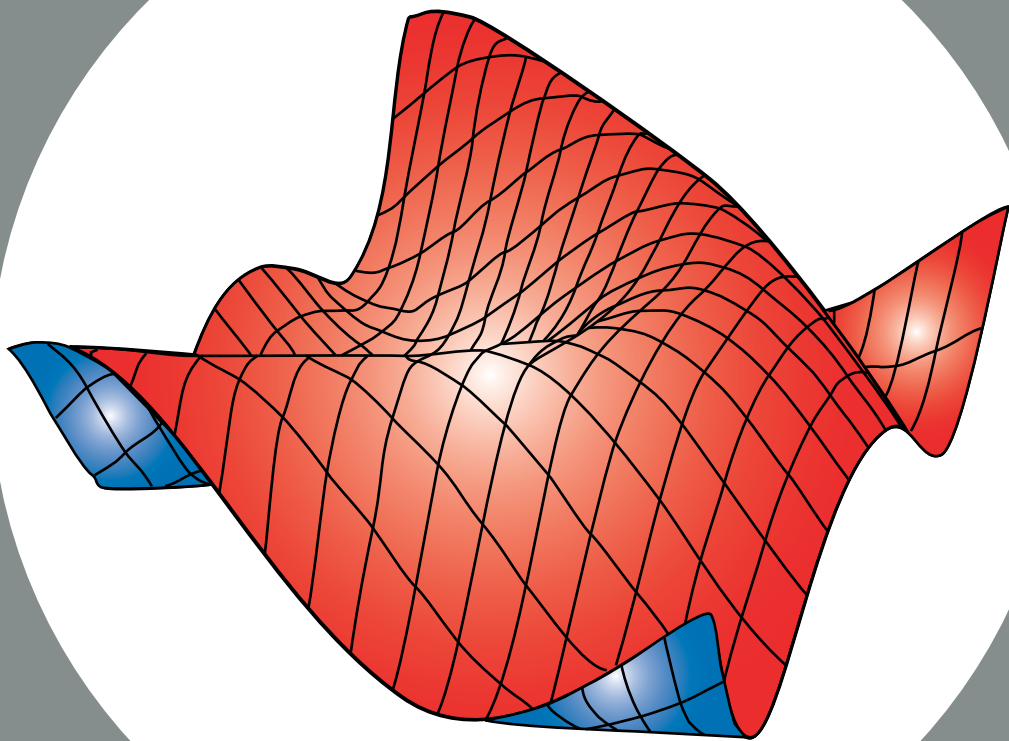


Trigonometría

Duodécimo
Nivel de Abstracción



MORENO

Trigonometría

José Luis Moreno Aranda

Trigonometría

José Luis Moreno Aranda

Grupo Mathematiké, SA de CV
Prohibido Reproducir
Todos los Derechos Reservados
Impreso en México
2009

Contenido

Introducción	
Niveles de abstracción	viii
Objetivo del libro	viii
Organización del libro	ix
Material didáctico	ix
Nuestra página en Internet	ix
Capítulo 1	
Elementos de Geometría	
Geometría	13
Punto	13
Recta	13
Plano	13
Espacio	14
Figuras Geométricas Planas	
Figuras geométricas planas	15
Polígonos	15
El círculo y la elipse	15
Clasificación de las figuras geométricas planas	15
Tipos de polígonos de acuerdo al tamaño de sus lados	15
Tipos de polígonos de acuerdo al número de sus lados	16
Clasificación de los cuadriláteros	16
Clasificación de los triángulos de acuerdo al paralelogramo del que proceden	17
Clasificación de los triángulos de acuerdo al tamaño de sus lados	18
Figuras geométricas planas	18
Perímetro de un triángulo	19
Perímetro de polígonos	19
Área de cuadrados, rectángulos y romboides	19
Área de triángulos	20
Área de polígonos	21
Perímetro de círculos	22
El número π es la relación entre el perímetro y el diámetro de un círculo	22
Área de círculos	22
Simetría	
Concepto de simetría	24
Capítulo 2	

Ángulos y Triángulos	
Rayos	29
Definición de ángulo	29
Forma de medir los ángulos	29
Rectas y ángulos	31
Clasificación de los triángulos de acuerdo a sus ángulos internos	33
Clasificación de los triángulos de acuerdo a la longitud de sus lados	34
Suma de los ángulos internos de un triángulo	34
Triángulos congruentes	34
Rectas proporcionales	34
Triángulos semejantes	35
Los grados es una unidad de medición sexagesimal	38
El radián es otra unidad para medir ángulos	40
Definición de radián	40
Letras del alfabeto griego	42

Capítulo 3

Triángulos Rectángulos	
Notación de los triángulos rectángulos	45
Teorema de Pitágoras	
Enunciado del teorema de Pitágoras	46
Demostración del teorema de Pitágoras	47
Plano Cartesiano y Círculos	
Plano coordenado	51
Definición de círculo	51
Ecuación del círculo	52
Ecuación del círculo con centro en el origen	52
Ecuación del círculo con centro en $C(a, \beta)$	52
Ecuación general del círculo	53
Tangente al círculo	55

Capítulo 4

Razones Trigonométricas	
Definición de razón trigonométrica en un triángulo rectángulo	59
Triángulos amigables	60
Razón seno	60
Construcción de la tabla de la razón seno	61
Razón inversa de la razón seno	63
Tabla de valores de la razón seno	64
Razón coseno	66
Relación entre la razón seno y la razón coseno	67
Construcción de la tabla de la razón coseno	67
Comportamiento de las razones seno y coseno	68
Gráfica de las razones seno y coseno	69
Razón inversa de la razón coseno	69
Algunas relaciones entre las razones seno y coseno	72
Razón tangente	74
Tabla de la razón tangente	76
La división entre cero no existe	77
Gráfica de la razón tangente	77
Comparación de las gráficas de las razones seno, coseno y tangente	77
Razón inversa de la razón tangente	78
Las razones cosecante, secante y cotangente	80
Gráfica de las razones cosecante, secante y cotangente	81
Relación entre las razones tangente, cosecante, secante y cotangente	83

Capítulo 5

Identidades Trigonométricas

Las seis razones trigonométricas	87
Identidades de las razones trigonométricas básicas	87
Valores de las razones trigonométricas	89
Geometría de los Triángulos	
Elementos de un triángulo	92
La altura de un triángulo	93
Área de un triángulo	94
La ley de los senos	95
La ley de los cosenos	96
La formula de Herón para calcular el área de un triángulo cualquiera	98
Capítulo 6	
El Concepto de Función	
Las funciones trigonométricas	103
Primer aproximación: la función como la relación entre dos conjuntos	103
Segunda aproximación: la función como una igualdad	106
Tercer aproximación: la función como un operador	107
Prueba para verificar si una ecuación es función o relación	108
El Concepto de Función Inversa	
La función inversa	111
Notación de función y función inversa	112
Relación que las gráficas de la función y de su función inversa guardan	113
Prueba para verificar si una función tiene función inversa	116
Criterio para verificar si una función tiene función inversa	116
Capítulo 7	
Las Funciones Trigonométricas	
Un punto en un círculo	121
Funciones trigonométricas seno y coseno	122
Funciones trigonométricas inversas seno y coseno	124
Restricciones de las funciones inversas seno y coseno	125
Las funciones seno y coseno son periódicas	125
La frecuencia de las funciones seno y coseno	126
La amplitud de las funciones seno y coseno	127
Mover horizontalmente las funciones seno y coseno	128
Mover verticalmente las funciones seno y coseno	128
Las funciones tipo sinusoidal	128
La función trigonométrica tangente	129
La función trigonométrica inversa tangente	130
Funciones trigonométricas recíprocas	130
Dominio y rango de las funciones trigonométricas	130
Más Identidades Trigonométricas	
Identidades de la suma de ángulos	131
Identidades del ángulo doble	134
Identidades del ángulo mitad	135
Capítulo 8	
Ecuaciones Trigonométricas	
Concepto de ecuación	141
Ecuaciones trigonométricas	141
Apéndice 1	
Respuestas Series de Ejercicios	
Capítulo 1	151
Capítulo 2	151
Capítulo 3	152
Capítulo 4	153

Capítulo 5	154
Capítulo 6	155
Capítulo 7	155
Capítulo 8	156
Tabla de las funciones seno, coseno y tangente	158

Apéndice 2

Material Didáctico Complemento del Libro

Teorema de Pitágoras. Primera Demostración	163
Teorema de Pitágoras. Segunda Demostración	165
Teorema de Pitágoras. Tercera Demostración	167
Teorema de Pitágoras. Cuarta Demostración	169
Teorema de Pitágoras. Quinta Demostración	171
Razones Trigonómicas	173

Introducción

Este libro de texto ha sido elaborado utilizando la *Pedagogía de San Ignacio de Loyola* aplicada a la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas. Esta pedagogía tiene como marco filosófico referencial una filosofía humanista, es decir, tiene como único objetivo promover las capacidades que identifican a un ser como humano: la imaginación, la inteligencia, la creatividad, la libertad, etcétera. Por lo cual el plan estratégico de este libro ha sido diseñado pensando únicamente en la promoción humana de los jóvenes que ahora transitan por los salones de clase.

La manera de proceder de San Ignacio en la apropiación de la experiencia de Dios¹, para ser adaptada al proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en el salón de clase, ha sido enriquecida utilizando la epistemología de Bernard Lonergan².

Esta metodología pedagógica consiste en un proceso de cinco pasos que se repiten cada vez que introducimos un nuevo concepto matemático. En la publicación *Pedagogía de San Ignacio Aplicada a la Enseñanza-Aprendizaje de las Matemáticas*³ se encuentra explicada en detalle esta novedosa metodología.

La estrategia pedagógica consiste en cinco pasos:

1. *Contextualizar el conocimiento.* Se define claramente qué concepto matemático vamos a estudiar y se coloca sobre la espiral ascendente del conocimiento, es decir, consiste en verificar que el estudiante se ha apropiado ya de los conceptos previos necesarios para saber con precisión cuál será el siguiente concepto que estudiaremos, ya que los conceptos no son entes aislados que aparecen de repente, sino que son como ladrillos que para formar una barda se colocan para soportar a los que estarán encima de ellos.
2. *Experimentar una realidad sensible utilizando los sentidos para permitirle al estudiante entender el concepto.* A través de una estrategia pedagógica adecuada, el estudiante utiliza sus sentidos: debe tocar, ver, oír, oler o gustar el concepto para que al extraer datos inquiera e imagine, y así pueda captar la unidad inteligible de esos datos y, por lo tanto, los entienda.
Usando la geometría como hilo conductor en el estudio de las matemáticas hemos podido utilizar imágenes y material didáctico manipulable para la apropiación de los principales conceptos de las matemáticas.
3. *Demostrar o verificar que lo entendido es cierto.* Cuando el alumno logra entender y, por lo tanto, puede formular con sus propias palabras el concepto, entonces se pregunta si lo que entendió es verdadero. Cuando el estudiante utiliza el conocimiento matemático que hasta este momento ha adquirido, demuestra el concepto y llega a la comprensión total.

4. *Aplicar el conocimiento adquirido y desarrollar la habilidad de usarlo en la solución de diferentes tipos de problemas.* Al aplicar el conocimiento, el alumno desarrolla o crea el algoritmo que le permite realizar operaciones o resolver problemas en forma ordenada y eficiente. Sin embargo, no basta sólo con que el alumno deduzca el algoritmo correspondiente sino que también es indispensable que desarrolle la habilidad y acumule la experiencia necesaria para el planteamiento y resolución de ese tipo de problemas.
5. *Evaluar lo aprendido y la forma como fue aprendido.* La evaluación se hace en dos sentidos. Primero se verifica si el estudiante se apropió del concepto matemático estudiado, así como desarrolló la habilidad y acumuló la experiencia necesaria en el planteamiento y resolución de problemas. Después se debe evaluar la forma en la cual hemos expuesto al alumno al concepto, es decir, nuestro propio trabajo como maestros.

Para darle coherencia al proceso de ir recorriendo el conocimiento matemático a través de los conceptos e ir apropiándonos de ellos mediante el uso de los sentidos, utilizamos la geometría como el hilo que conduce el conocimiento, es decir es como el alambre con el que construimos la espiral sobre la cual colocamos los conceptos.

La pedagogía de San Ignacio utiliza como estrategia la repetición, por lo cual el mismo concepto se aborda varias veces en el libro pero cada vez a un mayor nivel de complejidad y en combinación con otros conceptos.

Niveles de abstracción

Desde las primeras experiencias sensibles de un niño donde tocar objetos es el modo privilegiado que poco a poco lo va introduciendo en el maravilloso mundo de los números naturales, hasta la apropiación de los primeros símbolos matemáticos, representan el inicio de todo individuo en el apasionante ascenso del desarrollo de la imaginación o capacidad de abstracción a través de las matemáticas.

El punto de partida en la espiral del conocimiento matemático es claro y fácilmente cuantificable, sin embargo el punto final es inconmensurable ya que el individuo llegará hasta donde quiera llegar y lo más maravilloso es que durante todo el tiempo que su limitada existencia dure siempre podrá seguir ascendiendo. No hay límites o barreras, el ascenso siempre continúa, el infinito es inalcanzable y la plenitud utopía. El decir que un individuo va aprendiendo y dominando el conocimiento matemático es equivalente a decir que su capacidad de abstracción va en aumento, ya que puede imaginar o abstraer realidades matemáticas cada vez más sofisticadas.

Este desarrollo de la capacidad de abstracción a través de la apropiación del conocimiento matemático lo podemos clasificar en cuatro grandes niveles de abstracción:

- Aritmética
- Álgebra
- Funciones y Geometría Analítica
- Matemáticas Infinitesimales

Objetivo del libro

El objetivo de este libro es cubrir la primera parte del duodécimo nivel de abstracción, en la espiral ascendente del conocimiento matemático. En este nivel, aplicamos los conceptos y sus aplicaciones del álgebra básica e intermedia, para entrar en el mundo de las funciones y la trigonometría.

Estudiamos los elementos de geometría plana, las figuras geométricas, su clasificación y simetría.

Aplicamos las herramientas de la geometría para construir ángulos y aplicarlos en los triángulos.

Estudiamos con detenimiento los triángulos rectángulos, el teorema de Pitágoras, el plano cartesiano, el círculo y las relaciones trigonométricas.

Abordamos el concepto de función, usando la estrategia pedagógica de las aproximaciones al concepto.

Utilizando el concepto de función, construimos las funciones trigonométricas, las igualdades trigonométricas y sus aplicaciones en las ecuaciones trigonométricas.

Organización del libro

El libro ha sido organizado por conceptos, niveles de abstracción y aplicaciones de los conceptos.

Una vez que el alumno ha terminado de recorrer los conceptos y aplicaciones del álgebra básica e intermedia, está preparado para recorrer este libro en el orden en el cual se presentan los conceptos y sus aplicaciones.

Material didáctico

Este libro de texto viene acompañado de un paquete de material didáctico, que nos permite, utilizando nuestros sentidos, demostrar el teorema de Pitágoras de diez maneras diferentes. Así como también, construir las tablas de las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente y sus gráficas.

Durante el desarrollo del texto se explica la forma y el momento en la cual debe ser utilizado.

Nuestra página en Internet

Con el objetivo de tener una vía de comunicación directa entre los maestros, los alumnos y el grupo de investigadores que hacemos esta propuesta educativa, el proyecto de investigación en la enseñanza de las matemáticas *Mathematiké* tiene una página en Internet: www.mathematike.org. En este sitio presentamos con más detalle la pedagogía de San Ignacio, así como la lista completa y actualizada del material didáctico y de los libros de texto y de trabajo. Es nuestro compromiso mantener siempre al día nuestra propuesta educativa, por lo que la comunicación con ustedes los maestros y alumnos es de vital importancia.

1. Obras de San Ignacio de Loyola. Biblioteca de autores cristianos, Madrid. 1997.
2. Lonergan, Bernard, *Collected works of Bernard Lonergan*, Insight, vol 3, University of Toronto Press, 1997.
3. Moreno Aranda, José Luis, *Pedagogía de San Ignacio aplicada a la enseñanza de las matemáticas*, Grupo Mathematiké, 2003.