

**Mathematiké**  
**Una Pedagogía Diferente**  
**Una Forma Integral,**  
**Inteligente y Creativa de**  
**Aprender Matemáticas**

# **Mathematiké**

Una Forma Integral, Inteligente y Creativa  
de Aprender Matemáticas

José Luis Moreno Aranda

Grupo Mathematiké, SA de CV

Prohibido Reproducir

Todos los Derechos Reservados

Impreso en México

2010

“Lo que sugiere el lenguaje, lo confirma el simbolismo. Porque si uno analiza un simbolismo, uno halla dos elementos distintos. Primero se da la abreviación: ochocientos treinta y siete se reduce a 837; un párrafo se comprime en la ecuación  $sen i = m sen r$ ; y al menos se reduce una página en cualquier expresión que implique al operador nabra. Pero el simbolismo es mucho más que una abreviación. De los millones que no tendrían dificultad en hallar la raíz cuadrada de 1764, no pocos tendrían dificultad si tuvieran que usar los números romanos al realizar la misma operación. ¿Por qué? No porque 1764 sea más corto que MDCCLXIV, sino porque ellos trabajan prácticamente y nunca han captado los teoremas algebraicos que subyacen bajo el conocimiento práctico. Su intelección ha dado un salto. Como las calculadoras que no entienden la suma, como las calculadoras que integran que no se preguntaron por el cálculo, ellos han adquirido a través del entrenamiento del salón de clases no un *insight* acerca de las operaciones aritméticas, sino una habilidad para obtener respuestas.”

B. Lonergan, *Primera Colección*, pp. 5-6

# Introducción

Durante los últimos años, hemos presenciado con gran admiración y preocupación el bajo nivel académico en matemáticas que tienen los alumnos que ingresan a la universidad.

Hace ya más de diez años el problema empezaba a tener niveles alarmantes y para resolverlo algunas universidades pusieron en práctica diferentes estrategias. Se establecieron cursos propedéuticos y de regularización o de nivelación. Algunas instituciones modificaron sus planes académicos, bajando los niveles de exigencia en el estudio de las matemáticas. Algunas otras simplemente han vivido el problema con paciencia, culpando a los maestros de las preparatorias por las lagunas (que ya son océanos) que tienen sus alumnos.

Los estudiantes que ingresan a las preparatorias en un muy significativo porcentaje tampoco cubren los mínimos requerimientos en matemáticas para continuar con su formación media superior.

Los encargados de los programas de matemáticas en las preparatorias muchas veces culpan a los maestros de secundaria, o a los programas de estudio, o a las discotecas y video juegos que están de moda.

En los niveles de primaria y secundaria encontramos situaciones similares. Escuchamos quejas que sólo cambian el lugar de los hechos, pero la triste realidad se repite.

Lo que sí es claro es que los maestros, de todos los niveles y tipos de escuelas, coincidimos en que algo está pasando y que el problema de la enseñanza de las matemáticas es cada vez más grave.

La consecuencia más inmediata del bajo nivel en matemáticas ha sido la falta de interés de muchos estudiantes por ingresar a las escuelas de ingeniería y ciencias en todo el país.

Cada vez escuchamos con mayor frecuencia que más jóvenes preparatorianos, por “miedo” a las matemáticas, o porque dicen que no les gusta, o no tienen habilidad o facilidad para su estudio, buscan profesiones donde el uso de esa disciplina sea mínimo. Con tristeza constatamos que muchos sí tienen interés en la ingeniería y en las ciencias exactas, pero por su deficiente formación matemática prefieren no ingresar a esas carreras.

La disminución en el interés por ingresar en las escuelas de ingeniería y ciencias es un problema que debe preocupar a todos los mexicanos. Vivimos en un país pobre, inmerso en una crisis económica continua que impide el desarrollo. La pobreza en el campo es alarmante. Tenemos que sacar a nuestro país adelante. La solución no es traer maquiladoras que hacen inversiones golondrinas y convenencieras,

que sólo dejan salarios mínimos. Debemos generar nuestra propia industria, que sea competitiva en calidad y precio, creativa en el desarrollo de tecnología; también es indispensable tecnificar el campo para aumentar su rendimiento. Para lo anterior, necesitamos ingenieros mexicanos capaces y comprometidos.

Es evidente, la historia lo ha comprobado una y otra vez, que los países con altos niveles de manufactura autóctona son los que han sobresalido y tienen calidad de vida respetable. Aquellos maquiladores o que basan su desarrollo en la venta de petróleo o de maderas preciosas, no dejan de vivir en crisis económica continua.

Es claro, que la deficiente y mal orientada formación en matemáticas es lo que impide a muchos jóvenes a optar por las carreras de ingeniería.

A través de los años de experiencia en la enseñanza en los niveles de preparatoria y universitario he constatado, con gran satisfacción, que todos los estudiantes tienen capacidad de razonamiento para aprender y gozar las matemáticas. Los bloqueos que creen tener, no se deben a gustos o capacidades intelectuales, sino a una deficiente formación en esta disciplina, que la mayoría de las veces ha sido tediosa, aburrida y sin sentido. Debe quedar claro: no es problema del sujeto, de sus gustos o habilidades, sino de la forma en la que ha sido expuesto a este conocimiento.

Los investigadores del Grupo Mathematiké estamos profundamente comprometidos con el desarrollo económico y social de nuestro país. Nos parece de vital importancia la formación de hombres y mujeres de excelente calidad académica y profundo sentido social. Por eso decidimos iniciar un programa de investigación en la enseñanza de las matemáticas para hacer una aportación profesional que contribuya a la solución de este problema.

Con gran satisfacción presentamos ahora la metodología que hemos desarrollado para enseñar matemáticas.

Realizamos un programa completo de la enseñanza de las matemáticas que no aborda la disciplina por temas, como tradicionalmente se ha hecho, sino por niveles de abstracción necesarios para comprender, usar y gozar esta bella ciencia, que ha sido fruto de la creatividad humana.

Hemos identificado los diferentes procesos intelectuales y sus niveles de abstracción que el estudiante tiene que dominar. Se trata de ir en un orden lógico y natural, no dar brincos y enseñar simples técnicas, estrategias o habilidades desconectadas del contexto y de la persona que los pretende aprender. Intenta llevar de la mano al alumno, para que después de dominar un primer nivel de abstracción, pase al siguiente, y así sucesivamente. Este es un trabajo de gran trascendencia y su implementación es nuestro compromiso.

En los últimos veinte años hemos presenciado una explosión tecnológica que ha tenido un crecimiento exponencial, motivada en un buen porcentaje por las exorbitantes ganancias de los fabricantes. Las calculadoras electrónicas se popularizaron entre los estudiantes de todos los niveles escolares y clases sociales. Las computadoras se nos han presentado como la alternativa clara para la enseñanza en las escuelas. En la actualidad, muchas instituciones educativas basan su prestigio y mercadotecnia en el número de computadoras que tienen en sus instalaciones. El uso incorrecto de las calculadoras y computadoras es una de las causas en la deficiente apropiación del conocimiento matemático ya que ha habido confusión, falta de claridad y de un análisis serio.

Esta novedosa forma de enseñar matemáticas no sólo se basa en los niveles de abstracción requeridos, sino que también utiliza como hilo conductor del conocimiento la geometría, lo que permite al estudiante, utilizando sus sentidos, entender y demostrar los conceptos.

Los puntos neurálgicos en la pedagogía al estilo Mathematiké son: el contexto, el uso de los sentidos para "experimentar" el conocimiento, entender y demostrar el concepto que se estudia para que así se dé la apropiación del conocimiento, su aplicación creativa y evaluación.

Para cada uno de los conceptos propios de un nivel de abstracción, o escalón en la escalera cuántica del conocimiento matemático, recorreremos la metodología de los cinco pasos.

A este proyecto de investigación le hemos llamado *μαθηματική* caracteres griegos que se leen como Mathematiké ya que hemos tratado de recuperar la riqueza de la evolución del pensamiento matemático que la humanidad ha hecho a través de su historia y cuyo origen lo podemos considerar en Grecia.

Utilizando esta metodología, hemos desarrollado todo el programa de matemáticas que un estudiante debe recorrer desde que ingresa a Pre Escolar hasta que termina la Preparatoria.

Esto nos ha permitido crear un forma *integral*, abordando todo el conocimiento matemático, *inteligente*, permitiendo al estudiante que utilice sus sentidos para apropiarse del conocimiento y *creativa*, es el estudiante mismo quien crea las matemáticas, libros de texto para todos estos niveles.

Los *Libros de Texto*, *Material Didáctico* y *Juegos Educativos* han sido diseñados siguiendo cuidadosamente nuestra metodología.

Mediante el uso del material didáctico y los juegos educativo el alumno utilizando sus sentidos involucra su ser completo para entender el concepto y demostrándolo obtiene la comprensión total como la pedagogía al estilo de San Ignacio lo propone.

Las matemáticas son el fundamento de las ciencias de la naturaleza, el instrumento privilegiado de reflexión que echa a andar nuestra imaginación y desarrolla nuestra inteligencia, el testimonio claro de la evolución intelectual de la humanidad, el fruto del ingenio, la imaginación y la pasión por conocer más; características que sólo le son propias a nuestra humanidad.

# La Pedagogía

## Introducción

La pedagogía es la rama de las ciencias sociales que se dedica al estudio de la enseñanza. Cómo transmitir conocimientos o cómo posibilitar que el estudiante se apropie de ellos es su razón de ser. Las diferentes corrientes pedagógicas proponen formas o maneras de proceder para que este proceso de enseñanza-aprendizaje se dé con mayor eficiencia.

La pedagogía, como rama del conocimiento humano, ha tenido un gran impulso durante estos últimos años, sin embargo, el “arte” de enseñar ha sido desde siempre una preocupación del ser humano.

Un mundo que, fruto de la revolución filosófica y tecnológica, ha cambiado vertiginosamente en los últimos años, un mundo que por lo menos ha duplicado su población en la segunda parte del siglo XX, en el que los índices de pobreza y marginación social han llegado a cifras nunca antes imaginadas, plantea nuevos y desafiantes retos a la pedagogía.

Si no queremos que el conocimiento sea sólo privilegio de unos cuantos que dominan y conforman el mundo en función de su propio beneficio, el acceso al conocimiento –no a la información indiscriminada– tiene que llegar a muchos más niños y adultos con muchos menos recursos económicos.

## Toda pedagogía tiene un marco filosófico referencial

Es claro que la educación tiene como actores principales y únicos a hombres y mujeres. También es entendible que los libros, pizarrones, computadoras, calculadoras, compases, lápices, pizarrones, bancas y edificios son sólo medios.

Cualquier proyecto educativo o técnica pedagógica debe tener como único objetivo a la persona misma y usar, de acuerdo a sus necesidades didácticas, los medios que juzgue necesarios. Es un error, no sólo pedagógico sino también moral, invertir el orden y querer hacer un proyecto educativo o desarrollar técnicas pedagógicas en función de los recursos, olvidándose de las personas.

Toda escuela pedagógica no sólo propone un procedimiento que facilita el proceso de enseñanza-aprendizaje, sino que claramente se sustenta en un concepto de ser humano y mundo que impulsa y quiere hacer operativo.

Educar en valores es precisamente querer hacer operativos los valores que nuestra filosofía educativa promueve. Es querer que los educadores y educandos se comporten y construyan el mundo de una manera determinada.

Para conocer qué valores se promueven en el proceso de enseñanza-aprendizaje, debemos saber en qué marco filosófico referencial se sustenta la pedagogía utilizada.

Decir que educamos en valores es un pleonasma, ya que educar necesariamente transmite valores; lo que claramente debemos especificar es qué valores son los que promovemos.

## **La pedagogía Mathematiké se sustenta en una filosofía educativa humanista**

Una filosofía educativa humanista es aquella que centra y pone toda su atención en la persona; un serio y profesional discernimiento le permite usar de manera discriminada los medios que juzga convenientes para alcanzar sus fines.

La pedagogía Mathematiké se encuentra sustentada en una filosofía educativa humanista, ya que su principal interés es permitirle a la persona misma adquirir el conocimiento para que sea cada vez más humano.

La filosofía educativa Mathematiké promueve la fraternidad, la igualdad, la justicia, la verdad, que son los valores que se enuncian con una sola palabra: el amor.

## **La pedagogía Mathematiké propone una metodología**

La pedagogía Mathematiké propone una metodología o manera de proceder en el salón de clase para que el proceso de enseñanza-aprendizaje sea más eficiente. A esta manera de proceder le llamamos *La Espiral Ascendente del Conocimiento*.

Queda entonces claro que una escuela pedagógica, como es la de Mathematiké, propone una metodología o manera de proceder e impulsa y quiere operativizar los valores que sustentan su marco filosófico referencial.

Usar la forma de proceder de Mathematiké para enseñar matemáticas es aplicar la metodología que este estilo propone, para permitir que la persona, apropiándose del conocimiento matemático, se promueva y se haga cada vez más libre, para que discerniendo con claridad los valores que promueven la mayor vida para los demás, construya un mundo más humano y más justo.

# Marco de Referencia

## La esencia del ser humano

La esencia son los elementos intrínsecos indispensable de una cosa que la hacen ser esa cosa y no otra.

La esencia del ser humano son aquellos elementos, notas o dinamismos que hacen de un ser viviente un ser humano. También podríamos definir la esencia del ser humano, diciendo que son aquellos elementos únicos del humano, que lo distinguen o diferencian de cualquier otra especie viviente sobre la Tierra.

Sería motivo de una larga y ardua discusión filosófica explicar con detalle qué es la esencia humana y qué significa en el proceso de todo ser humano. Sin embargo, para los fines que esta breve introducción persigue, basta con decir que la esencia del ser humano implica los dinamismos o constitutivos que le permiten hacerse cada vez más humano, ser más él mismo, que siendo igual que los demás, se hace único e irrepetible.

Podríamos comparar las notas esenciales o constitutivas con los ingredientes de un pastel: harina, leche, huevos, mantequilla, etcétera. El tipo, la calidad, la apariencia del pastel que hagamos dependerá de la forma cómo se usaron y combinaron los ingredientes. Utilizando los mismos componentes, es posible tener pasteles excelentes, buenos, mediocres y malos. El resultado final no depende de los ingredientes, sino de la manera cómo fueron utilizados.

## El ser humano es ya pero todavía no

Cuando una persona nace, es ya un ser humano, sin embargo empieza el largo camino de ir haciéndose más humano cada día. El ser humano es como el reino de Dios, ya está entre nosotros pero todavía no en toda su plenitud. El ser humano ya es humano, sin embargo todavía falta que se haga él mismo cada vez más humano.

Precisamente porque el hacerse cada vez más humano es una tarea del ser mismo, la libertad es un constitutivo esencial de todo hombre o mujer. Es decisión de cada individuo cómo quiere hacerse humano. La manera en que una persona se constituye como humano depende en gran medida del proyecto de ser humano que tiene.

De hecho es tal la apertura y el privilegio del ser humano, que puede ser lo que quiera ser, hacerse como quiera, moldearse según la utopía que le da sentido a su vida.

La libertad es privilegio único del ser humano y es posibilidad de ser cada vez más humano, más diferente de lo que no es humano.

## La imaginación, la inteligencia y la creatividad o ingenio son elementos, dinamismos o notas esenciales del ser humano

La *imaginación* es la capacidad que el ser humano tiene de formar representaciones figurativas y simbólicas en la mente. La *inteligencia* es la capacidad que tiene el ser imaginativo de captar la unidad en la multiplicidad de los datos recibidos a través de los sentidos. La *creatividad* o *ingenio* es la capacidad que el ser imaginativo e inteligente tiene de hacer algo nuevo que solucione un problema o mejore la situación.

*La imaginación, la inteligencia y la creatividad* son algunos de los elementos, notas o dinamismos  
Una Forma Integral, Inteligente y Creativa de Aprender Matemáticas

que constituyen la esencia del ser humano. Todos los bebidos al nacer están integralmente constituidos como pertenecientes al género humano; sin embargo, el desarrollo o potenciación de estos elementos o dinamismos dependerá del sujeto mismo.

En la infancia –primera parte de la vida de todo ser humano– las costumbres, gustos y problemas familiares y sociales marcan fuertemente al individuo para su desarrollo futuro. Después de pasado el periodo de transición –la adolescencia– será tarea exclusiva de la persona misma que se desarrolle y se haga cada vez más humano, o sea, potencie lo que esencialmente la constituye.

Indudablemente que en el desarrollo integral de una persona interviene no sólo la imaginación, la inteligencia y la creatividad, sino también la afectividad, la libertad, la apertura a la trascendencia, et-  
cétera. Sin embargo, en este trabajo nos referiremos exclusivamente al desarrollo de estas capacidades.

Juega un papel determinante en el desarrollo de la inteligencia y la creatividad la imaginación.

## La imaginación

La imaginación es la capacidad de formar representaciones figurativas y simbólicas en la mente. Es un elemento esencial humano que debemos desarrollar, cultivar, hacer cada vez más productivo en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Es mucho más importante fomentar el desarrollo o crecimiento de la imaginación, que la acumulación de conocimientos. El conocimiento sin imaginación es letra muerta, es enciclopedismo frío, del que no se genera conocimiento nuevo, o avance tecnológico, es simplemente un museo de palabras.

La imaginación, la inteligencia y el ingenio o creatividad acostumbramos usarlas como palabras sinónimas ya que se refieren a una capacidad que fácilmente identificamos como constituyente esencial sólo del ser humano, que lo distingue de cualquier otra especie animal que existe sobre la faz de la tierra.

## El conocimiento matemático y el desarrollo de la imaginación, inteligencia y creatividad

El avance en el conocimiento matemático depende del desarrollo de la imaginación tanto figurativa como simbólica. Desarrollar lo que llamamos habilidad matemática es exactamente lo mismo que desarrollar la habilidad de ser más imaginativos, inteligentes y creativos.

Hablar de niveles de abstracción matemática, es hablar de niveles o grados de imaginación, inteligencia y creatividad.

*Noticia buena:* Aprender matemáticas es desarrollar nuestra imaginación. Desarrollar nuestra imaginación es desarrollar nuestra inteligencia. Desarrollar nuestra inteligencia es desarrollar nuestra creatividad. Ser más creativos significa ser más humanos, ya que la creatividad es propiedad exclusiva del ser humano.

## Obstáculos en la vida ordinaria para el desarrollo de la imaginación

La revolución tecnológica que hemos vivimos durante la segunda parte del siglo XX, fundamentada fuertemente en el desarrollo de la electrónica, ha ido cambiando –en forma paulatina y muchas veces sin darnos cuenta– la manera que tenemos de abordar la realidad, de irnos haciendo humanos.

Este avance tecnológico ha limitado, sin ni siquiera percatarnos, la posibilidad del desarrollo de la imaginación.

Debemos señalar que hablar del pasado no significa referirnos a un momento mejor, como si sólo lo antiguo fuera bueno, sino expresarnos de una realidad diferente. Conocer la historia es el medio privilegiado para evaluar nuestra realidad y así hacer los cambios que juzguemos convenientes para mejorarla. Hecha esta aclaración miremos un poco hacia el pasado.

Con anterioridad al mencionado desarrollo tecnológico, la imaginación era uno de los elementos más importantes en la vida de los niños.

La literatura, el cuento y las narraciones escritas o contadas por las mamás o las abuelitas jugaban un papel muy importante en el mundo de las diversiones de los infantes. El niño se imaginaba en el fon-

do del mar viajando 20,000 leguas, o caminando al lado de los héroes recorriendo bosques o subiendo montañas.

El dibujo y la pintura invitaban a la imaginación a crear y recrear nuevos paisajes y escenarios cada vez más exóticos o desarrollados.

En el pasado, era más fácil para los niños mantener relaciones que promovían la imaginación y la creatividad. Al no existir máquinas contra las cuales competir, el juego comunitario era el recurso privilegiado para la diversión.

La televisión, el cine, el internet, los juegos electrónicos, los teléfonos celulares inteligentes son tan bien elaborados y tan fácilmente llevados hasta el último rincón de la casa más pequeña, dejan muy poco o nada a la imaginación. En lugar de motivarnos a imaginar nuevas realidades o a recrear escenarios cada vez más elaborados, simplemente nos lanzan a buscar películas más violentas y espectaculares, o a ver más horas de televisión o a jugar interminables y siempre iguales recorridos del muñeco de moda en el juego electrónico más reciente.

Los juguetes eran austeros: muñecas de trapo, soldados de plomo y carritos de madera. La imaginación infantil hacía que la muñeca hablara, que el soldadito combatiera y los carritos de madera alumbraran en la noche y ganaran reñidas carreras. No era el juguete en sí mismo la gran diversión, sino la creatividad y el ingenio del niño.

Ahora, fruto de este tremendo avance tecnológico, las muñecas hablan y contestan a los niños, caminan, se duermen y despiertan con sólo tocarles la mano o apretar el botón adecuado. Los soldados aparecen en escenarios de colores, con *sense around* y en tercera dimensión. Los carritos en vez de pedales tienen motor, luces y hasta direccionales.

El niño ya no juega, inventa, crea y construye, ahora éstas son tareas de los fabricantes, que motivados por tan jugoso mercado no cesan de proponer juguetes cada vez más sofisticados.

No se trata de regresar al pasado, sino de tener conciencia que las condiciones se transformaron. Ahora la realidad es otra, la cosmovisión del niño, del adolescente y del joven es muy diferente.

Ahora en el siglo XXI vivimos una nueva y retante era. Las comunicaciones son instantáneas, los teléfonos celulares, los ipods y los juegos electrónicos mantienen a los niños y jóvenes sumergidos en su propia realidad aislados de los demás, la información indiscriminada y casi ilimitada difundida a través del internet crea un bombardeo de ideas que confunde. No hay que realizar mucho esfuerzo para lograr el satisfactor, como tampoco hace falta pensar demasiado, la tecnología lo hace casi todo.

## **Obstáculos en la escuela para el desarrollo de la imaginación**

Nuevamente quiero hacer la aclaración –para que no parezca que estas líneas están escritas con amargura de viejo caduco que repite una y otra vez que lo pasado era mejor– que ver hacia atrás es para darnos cuenta de lo caminado, para evaluar los aciertos y los errores y así avanzar cada vez más.

El uso de las computadoras y calculadoras en el aula se ha generalizado en todos los niveles y hay escuelas que para parecer más modernas las exigen como parte del material didáctico. Sin embargo, su uso ha cambiado sustancialmente la posibilidad de entender los números y sus operaciones.

Cuando empezaron a extenderse las calculadoras todos nos llenamos de gusto, guardamos los ábacos y las reglas de cálculo, esperando que algún día se volvieran joyas de museo y las pudiéramos vender con grandes ganancias. Ya no tendríamos que rompernos la cabeza imaginando los decimales, o haciendo largas divisiones que habría que verificar usando la multiplicación. Las funciones trigonométricas dejaron de ser un reto para la imaginación; ahora no necesitaríamos ni siquiera saber en qué cuadrante se ubica el ángulo: la calculadora todo lo sabe.

## **El fracaso de los visionarios**

Los que se decían visionarios de esta revolución tecnológica afirmaban que gracias a ella el ser humano tendría tiempo para realizar otras actividades y ser más creativo. El trabajo sucio lo harían las máquinas. Opinaban que empezaría la gran libertad, esa libertad que desocupa a la mente de detalles vanos y le

abre la posibilidad de sólo fijarse en los esenciales.

Desgraciadamente estos visionarios no estuvieron del todo acertados, ya que olvidaron el detalle más importante: *la imaginación, la inteligencia y la creatividad* se desarrollan. Es indispensable que el individuo mismo ejercite su imaginación, potencie su inteligencia, trabaje su creatividad para que estas sean cada vez más sofisticadas.

Estas ayudas que nos liberarían para lanzarnos al estrellato intelectual, podemos entenderlas o imaginarlas mejor con la siguiente analogía.

Supongamos que finalmente, fruto del esfuerzo de los científicos y del ingenio de los técnicos, se crea la máquina que con sólo hablarle realiza en forma perfecta sus operaciones. Está diseñada para que nos libere de cualquier esfuerzo físico. Resulta ser tan efectiva y su diseño tan sofisticado que ya no tenemos que caminar para transportarnos, ni mucho menos esforzarnos para subir escaleras; es más, está tan finamente construida que hasta hace abdominales, nada y levanta pesas por nosotros. Basta dar un comando y la respuesta es veloz y perfecta. Ahora sí nos hemos liberado del poco productivo trabajo de hacer cualquier esfuerzo físico, como es caminar, correr, subir escaleras o hacer ejercicios, para dedicarnos de lleno a desarrollar nuestra fuerza física, para cultivar nuestro cuerpo, y así hacer del ser humano el verdadero Sansón.

Nos hemos liberado de todo esfuerzo físico, para convertirnos en el prototipo del hombre fuerte, ágil, veloz y dinámico. Sin embargo, fruto de la modernísima máquina, los músculos se atrofian, las articulaciones envejecen prematuramente y los huesos se descalcifican. La máquina que liberaría al ser humano de cualquier esfuerzo mundano, ha provocado el efecto contrario: la atrofia física, en lugar del pronosticado Sansón.

El principal promotor de tal revolucionario invento habría sido la avaricia de los fabricantes y vendedores, ciertamente no el bien común.

## **El uso indiscriminado de las calculadoras y las computadoras**

Algo similar ha pasado con la popularización de las calculadoras y las computadoras, por no ser usadas adecuadamente en el proceso de enseñanza-aprendizaje, sino de manera indiscriminada. Han limitado la posibilidad de que los niños desarrollen *su imaginación, su inteligencia y su creatividad*, que se apropien de los conceptos, que asciendan a niveles de abstracción cada vez más sofisticados. Han originado que nos brinquemos pasos, que se confunda el aprendizaje o apropiación del conocimiento con el saber operar máquinas, han imposibilitado que el estudiante sienta, experimente, guste y goce las matemáticas.

El mal uso de las máquinas electrónicas separa al estudiante del conocimiento, imposibilitándolo a afectarse por él, para así hacerlo suyo.

## **Es tiempo de una evaluación**

Creo que ha llegado el tiempo de revisar resultados, de analizar nuevamente los procesos, y de proponer otras posibilidades que asuman la tecnología como una ayuda o herramienta, pero no como el medio para la apropiación del conocimiento.

La revolución tecnológica –que utilitariamente se ha generalizado por los codiciosos industriales y comerciantes– en lugar de crear las condiciones para que los estudiantes se vuelvan hombres y mujeres libres con capacidad de discernir, para así cambiar este mundo por uno donde reine la verdad y la justicia, ha creado condiciones ideales para que los poderosos dueños de la tecnología dominen a los pueblos.

## **La tecnología opio del pueblo**

Ya no es la religión el opio del pueblo que adormece y embrutece, y que se usa para dominar a los más débiles; hoy el mal uso de la sofisticada tecnología es la droga que incapacita al ser humano para que utilice lo que le es propio: *su imaginación, inteligencia y creatividad*.

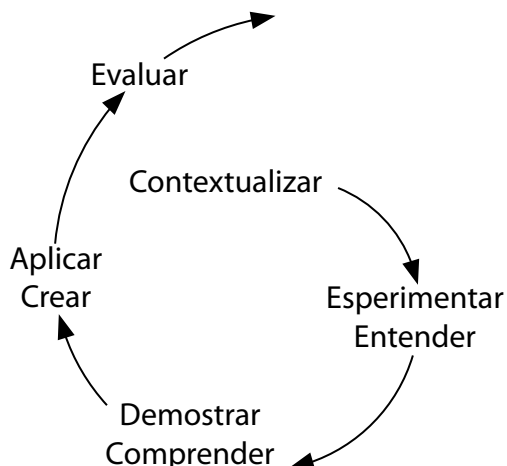
Es ahora el uso indiscriminado de la tecnología la que se ha vuelto religión, y ésta sí es una religión peligrosa que puede limitar seriamente el desarrollo integral del ser humano.

# La Espiral Ascendente del Conocimiento

## Relación del maestro y el alumno

Sólo hay verdadera apropiación del conocimiento, cuando el alumno mismo es el que lo aprehende y se lo apropia. El papel del maestro es únicamente crear los medios para que el educando pueda recorrer su propio camino. Es indispensable que la comunicación entre alumno y maestro no sea unilateral, sino que afecte realmente la vida de ambos, que se encuentran en el mismo nivel y con el mismo deseo de crecer con la ayuda mutua.

## La metodología de los cinco pasos



La metodología desarrollada por el grupo de investigadores de Mathematiké consta de cinco pasos, que son sucesivos, pero no se agotan ya que se recrean una y otra vez. Podríamos decir que su recorrido es circular pero no plano, que forma círculos cada vez más grandes y al mismo tiempo ubicados más alto. Es algo así como la espiral al estilo de Arquímedes en tres dimensiones, lo que la hace ascendente.

El dibujo muestra la representación de los cinco pasos de la pedagogía en dos dimensiones.

Si esta manera de proceder la aplicamos varias veces para la apropiación de conceptos en orden ascendente, generamos *La Espiral Ascendente del Conocimiento*.

## Primer Paso

### Contextualizar

Contextualizar, en el caso de la apropiación del conocimiento, significa ubicarlo en su contexto. De dónde viene y a dónde nos lleva, situarlo en su lugar y condiciones. Es también ubicar al individuo que lo estudia.

La apropiación del conocimiento no puede darse si primero no se ubica claramente al conocimiento y al sujeto en su propio contexto.

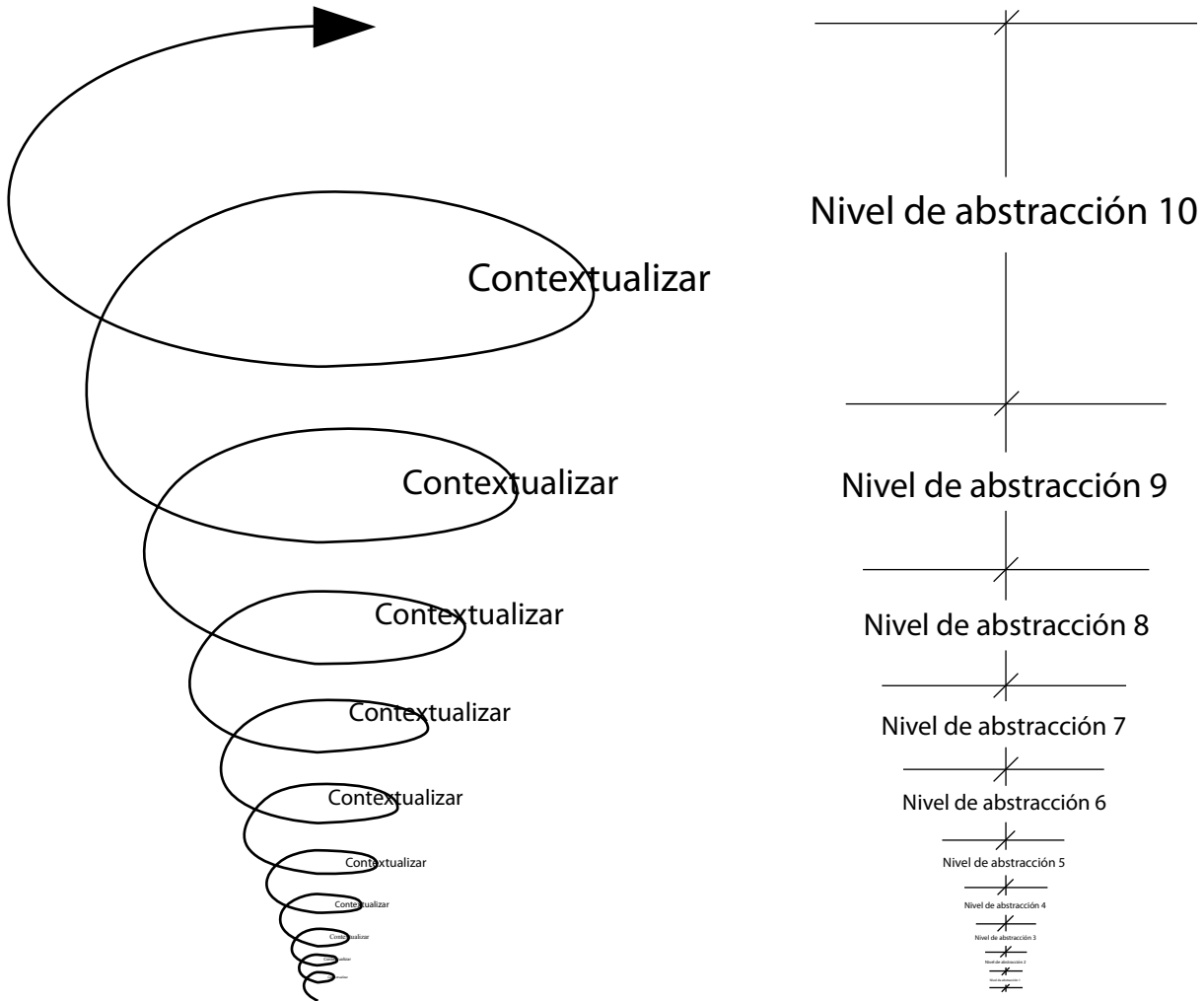
Contextualizar en la apropiación del conocimiento matemático en el salón de clase, es tarea exclusiva del maestro y se refiere a los conceptos que quiere enseñar. Consta de dos momentos.

## Primer Momento

### Ubicar en la espiral ascendente el concepto

El maestro ubica en la espiral ascendente del conocimiento los conceptos que expondrá a los alumnos. Es decir, los organiza de tal manera que el primer concepto que enseña es el conocimiento necesario para la apropiación del segundo y éste a su vez es necesario para el tercero y así sucesivamente.

Ubicamos los conceptos en forma ascendente de acuerdo a los niveles de abstracción requeridos para su apropiación.



Antes de exponer el concepto el maestro debe verificar que el estudiante ya se ha apropiado de los conceptos previos que son el soporte necesario para continuar en el ascenso de la apropiación del conocimiento.

Cuando el maestro prepara el concepto que expondrá en el salón de clases lo debe hacer teniendo en cuenta los conceptos que vendrán después. Es decir, cuando prepara el concepto 1 lo hace en función del concepto 2.

### Contextualizar uno o varios conceptos

En el caso de los conceptos matemáticos es muy importante mencionar que un mismo concepto puede ser contextualizado a diferentes niveles en la espiral ascendente del conocimiento al ser combinado con otros conceptos. Es decir, el mismo concepto se aborda varias veces, pero cada vez con un grado mayor de sofisticación.

Por ejemplo, en un primer nivel abordamos el concepto de número fraccionario, en un segundo

nivel el de número fraccionario combinado con el concepto de suma, en un tercer nivel combinado con el concepto de la multiplicación, en un cuarto nivel con el de la división, y así sucesivamente.

La repetición de un mismo concepto en diferentes niveles no sólo le permite al estudiante repasar lo conocido, sino principalmente comprender con mayor claridad el proceso lógico interno que le da consistencia al desarrollo matemático.

## **Segundo Momento**

### **Exponer al alumno al concepto**

Se lleva a cabo en el salón de clase y consiste en exponer, presentar, platicar o mostrar, utilizando los recursos pedagógicos necesarios, el concepto ubicándolo claramente en su contexto.

El segundo momento de la contextualización es equivalente a explicar, utilizando los recursos pedagógicos necesarios, en qué país nos encontramos y dentro de este país, en qué ciudad y dentro de la ciudad, en qué colonia y dentro de la colonia, en qué calle, y finalmente dentro de la calle en qué casa, y una vez dentro de la casa la describimos con lujo de detalles, es decir componemos el lugar.

## **Segundo Paso**

### **Experimentar-Entender**

La palabra experimentar tiene varios significados. La ciencia positiva dice que es realizar una prueba bajo condiciones controladas para demostrar una verdad conocida, examinar la validez de una hipótesis o determinar la eficacia de algo previamente no probado.

En la pedagogía Mathematiké experimentar significa sentir, utilizar los sentidos y la imaginación para dejarnos afectar, no sólo con la razón sino con el ser entero.

Experimentar una realidad sensible involucra al ser completo y le permite entender al captar la unidad en la diversidad de datos a los que ha sido expuesto.

Este segundo paso es responsabilidad del maestro y del alumno. El maestro, utilizando el material didáctico conveniente, prepara una dinámica, un experimento, un trabajo, o un ejercicio, a través del desarrollo del cual el alumno utilizando sus sentidos, es decir involucrando su ser completo toma los datos de lo experimentado, entiende, concibe y formula.

El maestro solamente prepara y asesora, es tarea exclusiva del alumno llevar a cabo el trabajo.

El alumno ha sido expuesto a una serie de datos que el maestro le mostró y ahora utilizando sus propios sentidos experimenta una realidad sensible, extrae los datos, inquiere e imagina, lo que le permite captar la unidad inteligible en esos datos y por lo tanto entender. El alumno al entender logra concebir el concepto y formularlo adecuadamente con sus propias palabras.

Usando la geometría como hilo conductor en el estudio de las matemáticas, es posible utilizar imágenes y material didáctico manipulable para la apropiación de algunos de los conceptos, especialmente los que se encuentran en los primeros niveles de abstracción, tanto de la aritmética como del álgebra.

## **Tercer Paso**

### **Demostrar-Juzgar**

Para que la apropiación del conocimiento sea completa, es decir se dé el conocimiento total, el alumno al formular con palabras el concepto se pregunta si es verdadero.

En este tercer paso el estudiante pasa de la reflexión a enumerar las condiciones necesarias para que este conocimiento sea verdadero, ordena las evidencias con las que cuenta lo que lo posibilita a demostrar y juzgar por él mismo el conocimiento.

Al terminar de realizar estas operaciones, podemos decir que ahora sí se ha dado la comprensión

total. El individuo ha pasado del entender a la comprensión total.

En el caso de la apropiación del conocimiento matemático el alumno demuestra el concepto, usando las herramientas matemáticas que corresponden al nivel de abstracción en el cual se encuentra y lo juzga ubicándolo en su contexto y relacionándolo con otros conceptos y sus aplicaciones.

Este conocimiento que ha sido visto, oído, olido, gustado, tocado, entendido y demostrado es ahora parte del sujeto mismo, por eso ya no ve el mundo de igual manera, lo vislumbra distinto porque ha crecido.

## Cuarto Paso

### Aplicar-Crear

Una vez dado el tercer paso, es decir demostrar, juzgar, el sujeto actuará al respecto, ya que se ha constituido en una persona renovada, que al ver el mundo y su alrededor estancados, sin evolucionar, necesariamente, como parte de su propio dinamismo, los querrá cambiar y renovar.

Una vez que el sujeto toma conciencia, fruto de su propia experiencia, de que sí es posible cambiar, surge en su interior una necesidad de renovar el mundo y su alrededor.

Es algo así como la persona que renueva su ropa; al verse con un nuevo y elegante vestuario tiene la necesidad de actuar para renovar también sus zapatos.

No puede haber un hombre nuevo que permanece impávido ante un mundo viejo, tiene que actuar para cambiarlo.

En el caso de la apropiación del conocimiento matemático, actuar significa aplicar los conceptos para crear, elaborar algoritmos, resolver problemas y plantear nuevos problemas que hacen necesario el estudio del siguiente concepto en nuestra espiral ascendente del conocimiento.

Un algoritmo es una "receta", al estilo de las de cocina, que consiste en un número determinado de pasos los cuales al seguirlos nos llevan a la solución de un problema matemático.

El estudiante no recibe y acepta, haciendo un acto de fe, como verdadero un algoritmo y lo aplica sin entender lo que hace, sino que él mismo debe desarrollarlo o crearlo.

Es importante mencionar que en el planteamiento y solución de problemas matemáticos, es decir en la aplicación del o los conceptos apropiados, no basta solamente con que el alumno deduzca o cree el algoritmo correspondiente, sino que también es indispensable que desarrolle la habilidad y acumule la experiencia necesaria para el planteamiento y resolución de ese tipo de problemas.

El alumno debe resolver el número y la variedad de problemas y ejercicios necesarios hasta que tenga la habilidad y la experiencia necesarias para plantear y resolver problemas del mismo tipo pero con mayor grado de dificultad.

## Quinto Paso

### Evaluar

En el dinamismo de la pedagogía Mathematiké la evaluación involucra tanto al maestro como al alumno y no sólo se refiere a los valores y al conocimiento que el sujeto se ha apropiado, sino también al proceso mismo que ha seguido para lograr esta apropiación.

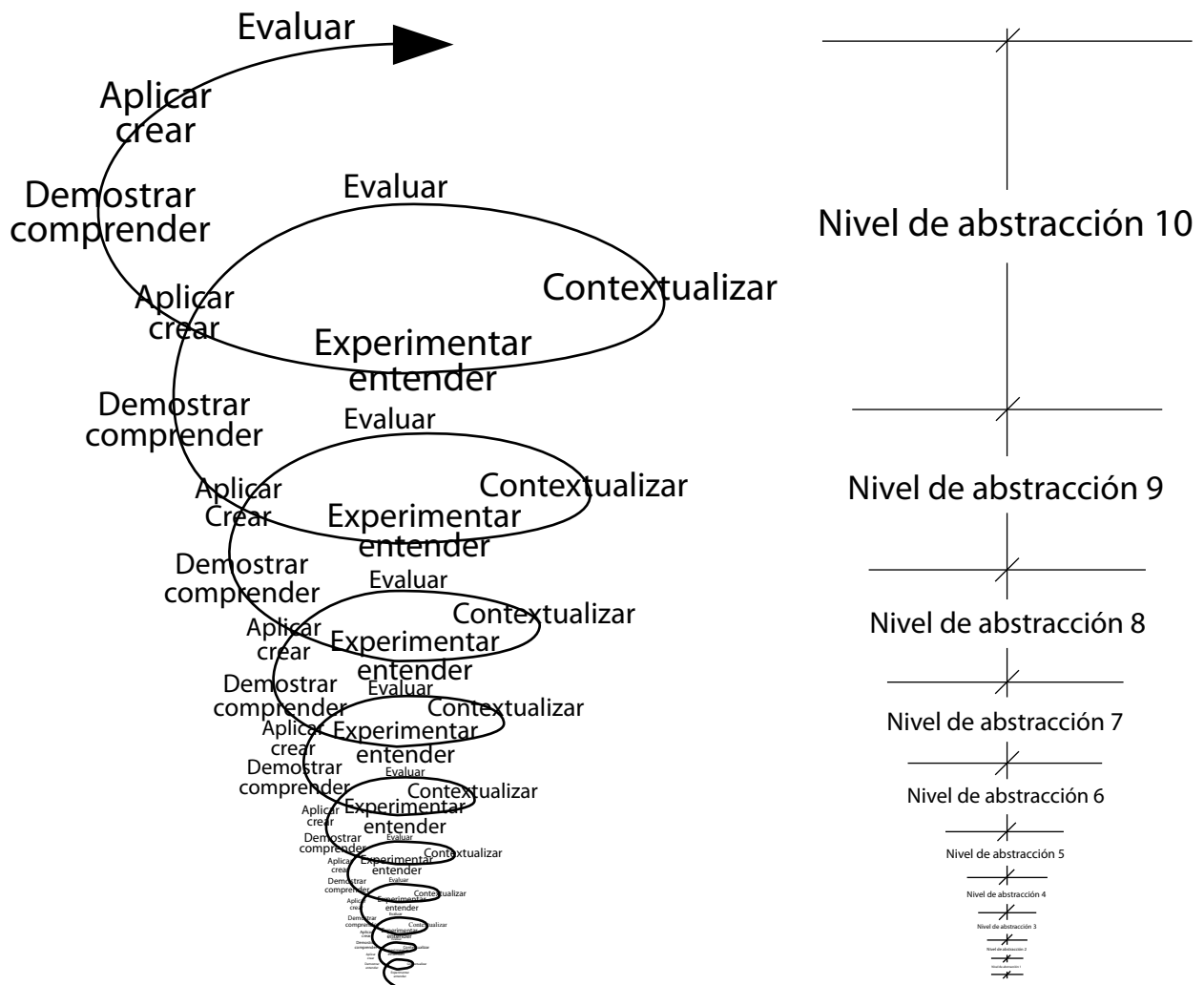
La primera parte de la evaluación consiste en verificar si el estudiante se ha apropiado de los valores que nuestra filosofía humanista promueven y de los conceptos matemáticos estudiados y éstos los sabe aplicar adecuadamente al haber desarrollado la habilidad y acumulado la experiencia necesaria en el planteamiento y resolución de problemas. Para hacer esta evaluación contamos con un buen número de recursos: trabajos, participación en clase, exámenes personales y en grupo, etc.

La segunda parte es la evaluación del maestro mismo. Para hacer ésta utilizamos los datos proporcionados por los alumnos tanto en su propia evaluación como en el diálogo directo, respetuoso y transparente que el maestro y el alumno deben siempre tener.

La evaluación clara, sincera y sin engaños, le da a conocer al individuo lo mucho o poco que ha caminado y lo invita a re-iniciar el proceso completo, pero ya no empieza donde lo hizo la primera vez, sino un poco más arriba, y el círculo que ahora recorrerá será de mayor diámetro. El sujeto ya se encuentra en la dinámica de la espiral ascendente del conocimiento.

## La espiral ascendente del conocimiento

El procedimiento de los cinco pasos se repite para cada uno de los conceptos o combinación de conceptos que el alumno debe apropiarse. Una vez que realizamos los cinco pasos, hemos dado una vuelta en la espiral ascendente del conocimiento. La siguiente vuelta la daremos a una mayor altura y recorriendo un círculo más grande. Al ir acomodando todos los conceptos de acuerdo a los niveles de abstracción, creamos la espiral ascendente del conocimiento.



# Niveles de Abstracción

## Primer Nivel de Abstracción

### Aritmética

#### Pre Escolar, Primero y Segundo Años de Primaria

##### Dinámica básica del sistema de numeración decimal

Las cuatro dimensiones de los dígitos

Suma y resta

Dígitos del 0 al 9

Números hasta el 99

El cero

Sumas hasta 18

Restas hasta 9

### Geometría

Cuadrado, rectángulo, triángulo, círculo

### Fracciones

Medios, tercios, cuartos

### Problemas de aplicación

Sumas

Restas

Estadística

## Segundo Nivel de Abstracción

### Aritmética

#### Segundo y Tercero Años de Primaria

##### Dinámica básica del sistema de numeración decimal

Suma y resta

Números hasta el 999

Sumas hasta 18

Restas hasta 18

### Multiplicación

Concepto de la multiplicación

Las tablas de multiplicar

### Geometría

Figuras geométricas

El metro

El reloj

## **Fracciones**

- Concepto de fracción
- Quintos, sextos, séptimos, octavos

## **Problemas de aplicación**

- Sumas
- Restas
- Estadística

## **Tercer Nivel de Abstracción**

### **Aritmética**

#### **Tercero y Cuarto Años de Primaria**

##### **Dinámica básica del sistema de numeración decimal**

- Suma resta

##### **Multiplicación**

- Las tablas de multiplicar
- El algoritmo de la multiplicación

##### **División**

- Concepto de la división
- Las tablas de dividir
- El algoritmo de la división

##### **Geometría**

- Polígonos
- El metro y el reloj
- Perímetro y área de un polígono
- Figuras sólidas
- Concepto de volumen y volumen de un poliedro

##### **Fracciones**

- Concepto de la suma y resta de fracciones
- Común denominador
- Algoritmo de la suma y resta de fracciones

##### **Problemas de aplicación**

- Suma y resta
- Multiplicación y división
- Suma y resta de fracciones
- Estadística

## **Cuarto Nivel de Abstracción**

### **Aritmética**

#### **Cuarto y Quinto Años de Primaria**

##### **Dinámica básica del sistema numérico decimal**

##### **Ábaco tipo japonés**

##### **Propiedades de los números naturales**

##### **Clasificación de los números naturales**

##### **Teorema fundamental de la aritmética**

##### **Desarrollo del algoritmo de la suma y la resta**

##### **Sumas y restas utilizando el ábaco**

##### **Restas de cualquier número natural**

##### **Desarrollo del algoritmo de la multiplicación**

##### **Desarrollo del algoritmo de la división**

Desarrollo del algoritmo de la suma y resta de fracciones  
El mínimo común denominador  
Polígonos  
Triángulos  
El círculo  
Sistema métrico decimal  
Sistema sexagesimal  
Volumen de poliedros y cilindros  
Sistema romano de numeración

## **Quinto y Sexto Niveles de Abstracción**

### **Aritmética**

#### **Quinto y Sexto Años de Primaria**

Los números naturales  
Análisis de los números  
    Árbol genealógico de los números reales positivos  
Sumas y restas utilizando el ábaco  
La suma y la resta son operaciones inversas  
Sumas y resta combinadas  
La multiplicación y la división son operaciones inversas  
Desarrollo del algoritmo de la división  
Comprobación de la multiplicación y la división  
Suma y resta de fracciones  
Multiplicación y división de fracciones  
Proporciones  
Regla de tres  
Razón  
Promedio  
Concepto de raíz cuadrada  
    Cálculo de la raíz cuadrada utilizando material didáctico  
Algoritmo de la raíz cuadrada  
Figuras geométricas planas  
Simetría de figuras geométricas planas  
Perímetros y áreas de polígonos  
Prismas, poliedros, cilindros, pirámides y conos  
Volumen de prismas, cilindros, pirámides, conos y poliedros

## **Séptimo Nivel de Abstracción**

### **Integración del Conocimiento Aritmético**

#### **Sexto Año de Primaria y Primer Año de Secundaria**

La dinámica básica del sistema de numeración decimal  
    Los números naturales y los números enteros  
Suma y resta  
    La suma y resta de números hasta el 18  
    Ábaco tipo japonés  
    La suma y la resta son operaciones inversas  
    Sumas y restas combinadas  
Multiplicación y división  
    La multiplicación

La división  
La multiplicación y la división son operaciones inversas  
Comprobación de la multiplicación y la división

#### **La notación decimal**

Operaciones básicas en notación decimal

#### **Análisis numérico**

Números primos y no primos  
Creación de los números naturales  
Los números fraccionarios  
Clasificación de los números  
La recta de los números reales positivos

#### **Números fraccionarios**

Suma y resta de fracciones  
Multiplicación y división de fracciones

#### **Temas selectos de aritmética**

Sistema romano de numeración  
Proporciones y regla de tres  
Promedio  
Raíz cuadrada

## **Séptimo Nivel de Abstracción**

### **Integración del Conocimiento Geométrico**

#### **Sexto Año de Primaria y Primer Año de Secundaria**

##### **Unidades de medición**

Sistema métrico decimal  
Sistema sexagesimal  
Sistema inglés  
Conversión de unidades entre los sistemas de medición

##### **Figuras geométricas planas**

Clasificación de las figuras geométricas planas  
Simetría de figuras geométricas  
Perímetro y área  
Teorema de Pitágoras

##### **Prismas, poliedros, cilindros, pirámides, conos y esferas**

Clasificación de las figuras geométricas sólidas  
Volumen de figuras geométricas sólidas

## **Octavo Nivel de Abstracción**

### **Álgebra**

#### **Primer Año de Secundaria**

##### **Conjuntos**

##### **Orden en la ejecución de las operaciones**

##### **Los números tienen su imagen**

En álgebra ya no restamos, sólo sumamos  
El signo menos (-) significa la imagen del número  
El signo más (+) significa sumar el número

##### **Multiplicación y división de números reales**

##### **Suma de números reales**

Las distancias también tienen imagen

Representamos las distancias con una flecha que se llama vector

### **Las letras representan números y dimensiones**

Las letras representan dimensiones

Primera aproximación a la ley conmutativa

Primera aproximación a la ley distributiva

Primera aproximación a la ley asociativa

### **Las letras representan áreas**

La multiplicación de dos letras

Las letras representan volúmenes

El producto de tres letras representa un volumen

### **El concepto de ecuación**

#### **Propiedades básicas de una ecuación**

#### **Ecuaciones de primer grado o ecuaciones lineales**

#### **Gráfica de una ecuación lineal**

#### **Problemas de aplicación de ecuaciones lineales**

#### **Proporciones**

#### **Porcentaje**

#### **Promedio**

#### **Interés**

## **Noveno Nivel de Abstracción**

### **Álgebra**

#### **Segundo Año de Secundaria**

#### **Álgebra de más de tres dimensiones**

#### **Potencias algebraicas**

Suma de potencias algebraicas

Multiplicación de potencias algebraicas

Potencia de una potencia

Potencia de un cociente

Simplificación de potencias algebraicas

División de potencias algebraicas

Multiplicar el numerador y el denominador por la misma cantidad no altera el cociente

#### **Cuadrado y raíz cuadrada**

#### **Factorización**

La ley distributiva de la multiplicación sobre la suma

#### **Productos notables**

Binomio al cuadrado

Suma de un binomio al cuadrado

Diferencia de un binomio al cuadrado

Suma de un binomio al cubo

Diferencia de un binomio al cubo

Factorización de una diferencia de cuadrados

Suma de cubos

Diferencia de cubos

Factorización de dos binomios

#### **División de polinomios**

Algoritmo para dividir un polinomio entre otro polinomio

División sintética

Multiplicación y división de fracciones algebraicas

Suma de fracciones algebraicas  
Estadística  
Permutaciones  
Combinaciones  
Probabilidad

## **Noveno Nivel de Abstracción**

### **Álgebra**

#### **Tercer Año de Secundaria**

**Solución de una ecuación**

**Ecuaciones de primer grado**

**Ecuaciones de segundo grado**

Teorema del factor cero

Todas las ecuaciones cuadráticas se resuelven por factorización

**Gráfica de una ecuación**

**Gráfica de una ecuación de primero y segundo grado**

**Sistemas de ecuaciones**

Sistemas de ecuaciones de dos variables

Sistemas de ecuaciones de tres variables

Sistemas de ecuaciones lineales

Sistemas de ecuaciones no lineales

**Solución de un sistema de ecuaciones**

**Solución de un sistema lineal de dos ecuaciones**

Método de sustitución para resolver un sistema de ecuaciones

Método de igualación para resolver un sistema de ecuaciones

Método de eliminación para resolver un sistema de ecuaciones

**Solución de un sistema lineal de tres ecuaciones**

**Problemas de aplicación de sistemas lineales**

**Desigualdades**

**Solución de una desigualdad de primer grado**

**Problemas de aplicación de desigualdades**

**Sistemas de desigualdades lineales**

**Valor absoluto**

**Trigonometría**

**Ángulos y triángulos**

**Triángulos rectángulos**

**Teorema de Pitágoras**

**Funciones trigonométricas**

**Tabla de las funciones seno, coseno y tangente**

**Letras del alfabeto griego**

## **Décimo Nivel de Abstracción**

### **Integración del Conocimiento Algebraico**

#### **Primer Año de Preparatoria**

**La dinámica básica del álgebra**

Conjuntos

Orden en la ejecución de las operaciones

**Los números tienen imagen**

- Los números imaginarios o negativos
- Multiplicación y división de números reales
- Suma de números reales
- Dinámica básica del álgebra**
  - Álgebra en una dimensión
  - Álgebra en dos dimensiones
  - Álgebra en tres dimensiones
  - Álgebra de más de tres dimensiones
- Factorización y productos notables**
  - La factorización
  - Los productos notables
- Álgebra de polinomios y fracciones**
  - Suma, multiplicación y división de polinomios
  - Suma, multiplicación y división de fracciones
- Ecuaciones y desigualdades**
  - Ecuaciones de primer grado
  - Ecuaciones de segundo grado
  - Sistemas de ecuaciones
  - Desigualdades

## **Décimo y Undécimo Niveles de Abstracción**

### **Álgebra**

#### **Primero y Segundo Años de Preparatoria**

- La recta de los números reales
- Clasificación de los números
- Propiedades de los números reales
- Notación científica
- Logaritmos
- Teorema de Newton o teorema binomial**
  - Definición de un binomio elevado a la potencia  $n$
  - El triángulo de Pascal
  - Operaciones con factorial
  - Sumatoria
  - Algoritmo para desarrollar el binomio  $(a + b)^n$
- Diferencia de dos términos elevados a la potencia  $n$**
- Ecuaciones de primer grado o lineales**
- Ecuaciones de segundo grado**
- Números complejos**
- Ecuaciones cuadráticas cuyas raíces son complejas**
- Ecuaciones con valor absoluto**
- Ecuaciones de otros tipos**
- Desigualdades**
- Análisis de la gráfica de una ecuación**
- La recta
- El círculo
- Recta tangente al círculo
- Sistemas de ecuaciones
- Sistemas de ecuaciones lineales
- Sistemas de ecuaciones lineales con matrices

Sistemas de ecuaciones lineales con determinantes  
Regla de Cramer  
Fracciones Parciales

## **Duodécimo Nivel de Abstracción**

### **Trigonometría**

#### **Segundo Año de Preparatoria**

Elementos de geometría

Figuras geométricas planas

Simetría

Ángulos y triángulos

Triángulos rectángulos

Teorema de Pitágoras

Plano Cartesiano

Círculos

Razones trigonométricas

Identidades trigonométricas

Geometría de los triángulos

El concepto de función

El concepto de función inversa

Las funciones trigonométricas

Más identidades trigonométricas

Ecuaciones trigonométricas

# Desarrollo de los Algoritmos

## Las Cuatro Dimensiones de los Dígitos

### Primer nivel de abstracción

1. Identificar el nombre de objetos de la naturaleza utilizando material didáctico, dinámicas y juegos.
2. Formar conjuntos de 1 a 9. Contar los objetos uno a uno sumándolos. Identificar los conjuntos nombrándolos con el número de objetos que contienen. Asociar el nombre del conjunto con el símbolo que representa el número.
3. Quitar objetos de los conjuntos restándolos uno a uno. Identificar los conjuntos nombrándolos con el número de objetos que contienen. Asociar el nombre del conjunto con el símbolo que representa al número.
4. Identificar el símbolo y el nombre del cero con un conjunto que no contiene objetos.

## La Suma

### Primer nivel de abstracción

1. Utilizando material didáctico que contiene imágenes visuales de objetos y dígitos, sumar mentalmente dos dígitos hasta 9.
2. Utilizando las columnas numéricas del 0 al 99 con fichas que contienen imágenes que representan el valor de los dígitos, sumar dos dígitos hasta 9 en la columna de las unidades.
3. Utilizando las columnas numéricas del 0 al 99 con 18 fichas que contienen imágenes que representan el valor de las unidades y 9 que representan el valor de las decenas, sumar dos dígitos hasta 9 en las columnas de las unidades y las decenas, haciendo sumas de 0 a 99.
4. Utilizando notación desarrollada y compacta, sumar dos dígitos hasta 9 en las columnas de las unidades y las decenas, haciendo sumas de 0 a 99.

### Segundo nivel de abstracción

5. Utilizando las columnas numéricas del 0 al 99 con 18 fichas que contienen imágenes que representan el valor de las unidades y 9 que representan el valor de las decenas, sumar dos dígitos hasta 18 en las columnas de las unidades y las decenas, haciendo sumas de 0 a 99.
6. Utilizando notación desarrollada y compacta, sumar dos dígitos hasta 18 en las columnas de las unidades y las decenas, haciendo sumas de 0 a 99.
7. Utilizando las columnas numéricas del 0 al 999 con 18 fichas que contienen los dígitos que representan el valor de la columna de las unidades, 18 que representan el valor de la columna de las decenas y 9 que representan el valor de la columna de las centenas, sumar dos

- dígitos hasta 18 en las columnas de las unidades y las decenas, haciendo sumas de 0 a 999.
- Utilizando notación desarrollada y compacta, sumar dos dígitos hasta 18 en las columnas de las unidades, las decenas y las centenas haciendo sumas de 0 a 999.

### **Tercer nivel de abstracción**

- Utilizando las columnas numéricas del 0 al 99,999 con 9 fichas que contienen los dígitos que representan el valor de cada una de las columnas numéricas, sumar dos dígitos hasta 18 en las columnas de las unidades, las decenas, las centenas, las unidades de millar y las decenas de millar haciendo sumas de 0 a 99,999.
- Utilizando notación desarrollada y compacta, sumar dos dígitos hasta 18 en las columnas de las unidades, las decenas, las centenas, las unidades de millar y las decenas de millar haciendo sumas de 0 a 99,999.

### **Cuarto nivel de abstracción**

- Utilizando el ábaco tipo japonés, efectuar cualquier suma sin importar el número de dígitos que componen los números, o la cantidad de sumandos.
- Utilizando notación compacta, efectuar cualquier suma sin importar el número de dígitos que componen los números, o la cantidad de sumandos.
- Utilizando notación compacta, efectuar cualquier suma de números enteros y decimales.

## **La Resta**

### **Primer nivel de abstracción**

- Utilizando material didáctico que contiene imágenes visuales de objetos y dígitos, restar mentalmente hasta 9.
- Utilizando las columnas numéricas del 0 al 99 con fichas que contienen imágenes que representan el valor de los dígitos, restar dos dígitos de 0 a 9 en la columna de las unidades.
- Utilizando las columnas numéricas del 0 al 99 con 18 fichas que contienen imágenes que representan el valor de las unidades y 9 que representan el valor de las decenas, restar dos dígitos hasta 9 en las columnas de las unidades y las decenas, haciendo restas de 0 a 99.
- Utilizando notación desarrollada y compacta, restar dos dígitos hasta 9 en las columnas de las unidades y las decenas, haciendo restas de 0 a 99.

### **Segundo nivel de abstracción**

- Utilizando las columnas numéricas del 0 al 99 con 18 fichas que contienen imágenes que representan el valor de las unidades y 9 que representan el valor de las decenas, restar dos dígitos hasta 18 en las columnas de las unidades y las decenas, haciendo restas de 0 a 99.
- Utilizando notación desarrollada y compacta, restar dos dígitos hasta 18 en las columnas de las unidades y las decenas, haciendo restas de 0 a 99.
- Utilizando las columnas numéricas del 0 al 999 con 18 fichas que contienen los dígitos que representan el valor de la columna de las unidades, 18 que representan el valor de la columna de las decenas y 9 que representan el valor de la columna de las centenas, restar dos dígitos hasta 18 en las columnas de las unidades y las decenas, haciendo restas de 0 a 999.
- Utilizando notación desarrollada y compacta, restar dos dígitos hasta 18 en las columnas de las unidades, las decenas y las centenas haciendo restas de 0 a 999.

### **Tercer nivel de abstracción**

- Utilizando las columnas numéricas del 0 al 99,999 con 9 fichas que contienen los dígitos que representan el valor de cada una de las columnas numéricas, restar dos dígitos hasta 18 en las columnas de las unidades, las decenas, las centenas, las unidades de millar y las decenas de millar haciendo restas de 0 a 99,999.
- Utilizando notación desarrollada y compacta, restar dos dígitos hasta 18 en las columnas de las unidades, las decenas, las centenas, las unidades de millar y las decenas de millar haciendo restas de 0 a 99,999.

### **Cuarto nivel de abstracción**

11. Utilizando el ábaco tipo japonés, efectuar cualquier resta sin importar el número de dígitos que componen los números.
12. Utilizando notación compacta, efectuar cualquier resta sin importar el número de dígitos que componen los números.
13. Utilizando notación compacta, efectuar cualquier resta de números enteros y decimales.

## **La Multiplicación**

### **Segundo nivel de abstracción**

1. Utilizando el material didáctico entender y demostrar el concepto de la multiplicación.
2. Crear las tablas de multiplicar del 0 al 9.
3. Utilizar las tablas de multiplicar para familiarizarse con la notación usada para hacer multiplicaciones.

### **Tercer nivel de abstracción**

4. Utilizando notación desarrollada y la cuadrícula, resolver multiplicaciones cuando el multiplicando tiene dos cifras y el multiplicador una.
5. Utilizando la cuadrícula, resolver multiplicaciones cuando el multiplicando tiene tres cifras y el multiplicador una.
6. Utilizando el procedimiento de la cuadrícula sin dibujar los cuadritos y el algoritmo en notación compacta, resolver multiplicaciones cuando el multiplicando tiene dos cifras y el multiplicador una.

### **Cuarto nivel de abstracción**

7. Utilizando la cuadrícula, notación compacta con el procedimiento de la cuadrícula sin dibujar los cuadritos y el algoritmo en notación compacta, resolver multiplicaciones utilizando la cuadrícula, notación compacta con el procedimiento de la cuadrícula sin dibujar los cuadritos y el algoritmo en notación compacta cuando el multiplicando tiene dos cifras y el multiplicador dos.
8. Utilizando la cuadrícula, notación compacta con el procedimiento de la cuadrícula sin dibujar los cuadritos y el algoritmo en notación compacta, resolver multiplicaciones cuando el multiplicando tiene tres cifras y el multiplicador dos.
9. Utilizando el algoritmo en notación compacta, resolver cualquier multiplicación cuando el multiplicando y el multiplicador contienen números enteros.

### **Quinto nivel de abstracción**

10. Utilizando el algoritmo en notación compacta, resolver cualquier multiplicación cuando el multiplicando y el multiplicador contienen números expresados en notación decimal.

## **La División**

### **Tercer nivel de abstracción**

1. Utilizando el material didáctico entender y demostrar el concepto de la división.
2. Crear las tablas de dividir del 0 al 9
3. Utilizar las tablas de dividir para familiarizarse con la notación usada para hacer divisiones.
4. Resolver divisiones cuando el dividendo tiene dos cifras, el divisor una y el residuo no es cero, utilizando notación de fracción y la casita. Expresar el resultado en notación de mixta.

### **Cuarto nivel de abstracción**

5. Aplicar la dinámica básica del sistema de numeración decimal para dividir números de una y dos cifras colocados en cualquiera de las columnas numéricas utilizando ceros para indicar su posición. El divisor es cualquier dígito de 2 a 9.
6. Resolver divisiones de números de dos y tres cifras utilizando la notación de fracción des-

componiendo el dividendo en sumandos que permitan hacer la división. El divisor es cualquier dígito de 2 a 9. Resolver este mismo tipo de divisiones utilizando la casita escribiendo las restas. Expresar el resultado en notación mixta.

7. Construir la notación decimal utilizando la dinámica básica del sistema de numeración decimal y el concepto de la división.
8. Resolver divisiones de números de dos y tres cifras expresados en notación decimal cuando el divisor es un dígito del 2 al 9. Escribir las restas.
9. Resolver divisiones de números de dos y tres cifras expresados en notación decimal cuando el divisor es un dígito de 1 a 9 con cualquier número de ceros. Escribir las restas.

### **Quinto nivel de abstracción**

10. Resolver divisiones escribiendo las restas y restando mentalmente cuando el dividendo es cualquier número, el divisor es cualquier dígito de 1 a 9.
11. Resolver divisiones escribiendo las restas cuando el dividendo es cualquier número y el divisor es cualquier número de dos o tres cifras.
12. Resolver divisiones escribiendo las restas y restando mentalmente cuando el dividendo es cualquier número y el divisor es cualquier número de dos o tres cifras.
13. Resolver divisiones escribiendo las restas y restando mentalmente cuando el dividendo y el divisor son cualquier número expresado en notación decimal.

## **La Raíz Cuadrada**

### **Quinto nivel de abstracción**

1. Entender y demostrar el concepto de la división como operación inversa de la multiplicación, esto es, comprobar que la división es correcta cuando al multiplicar el resultado de la división por el divisor obtenemos el dividendo.
2. Entender y demostrar el concepto de la raíz cuadrada como la longitud de los lados de un cuadrado cuya área conocemos. Por lo cual, podemos expresar que la raíz cuadrada de un número, es aquel número que al ser multiplicado por sí mismo nos da el número cuya raíz queremos conocer.
3. Entender y demostrar el concepto del promedio de dos números como el número que se encuentra a la mitad de dos números y se calcula sumando los dos números y dividiendo la suma entre 2.

### **Sexto nivel de abstracción**

4. Entender, demostrar y desarrollar la habilidad para utilizar el algoritmo de los tres pasos para calcular la raíz cuadrada.  
Primer paso  
Determinar una raíz cuadrada aproximada.  
Segundo paso  
Dividir el número entre la raíz cuadrada aproximada.  
Tercer paso  
Obtener el promedio del resultado de la división y el divisor. El promedio es la siguiente raíz cuadrada aproximada.

## **La Suma y Resta de Fracciones**

### **Tercer nivel de abstracción**

1. Utilizando material didáctico que contiene imágenes visuales de las fracciones, entender y demostrar el concepto de la suma y resta de fracciones.
2. Utilizando material didáctico que contiene imágenes visuales de las fracciones, entender y demostrar el concepto del común denominador.
3. Utilizando material didáctico que contiene imágenes visuales de las fracciones, resolver su-

mas y restas de fracciones.

4. Utilizando material didáctico que contiene imágenes visuales de las fracciones, resolver sumas y restas calculando el común denominador mentalmente y usando el método rápido para efectuar la operación. Simplificar y expresar el resultado en notación mixta.
5. Utilizando notación de fracción resolver sumas y restas calculando el común denominador mentalmente y usando el método rápido para efectuar la operación. Simplificar y expresar el resultado en notación mixta.

#### Cuarto nivel de abstracción

6. Utilizando notación de fracción resolver sumas y restas calculando el común denominador mentalmente y usando el método tradicional para efectuar la operación. Simplificar y expresar el resultado en notación mixta.

#### Quinto nivel de abstracción

7. Aplicando el teorema fundamental de la aritmética calcular el mínimo común denominador.
8. Utilizando tanto el método rápido como el método tradicional resolver sumas y restas de fracciones.

## El Volumen de Poliedros, Cilindros y Conos

#### Tercer nivel de abstracción

1. Utilizando el material didáctico familiarizarse con la unidad de medir volúmenes: el cubo. El volumen de un cubo es el producto del área de la base por la altura.

$$\text{Volumen}_{\text{Cubo}} = \text{Área}_{\text{Base}} \times \text{Altura}$$

2. Utilizando el material didáctico entender y demostrar que el volumen de cualquier prisma se calcula multiplicando el área de la base por la altura. Calcular el volumen de prismas.

$$\text{Volumen}_{\text{Prisma, Cilindro}} = \text{Área}_{\text{Base}} \times \text{Altura}$$

3. Calcular el volumen de un poliedro irregular descomponiéndolo en prismas rectangulares cuyo volumen podemos calcular fácilmente.

#### Cuarto nivel de abstracción

4. Calcular el volumen de un poliedro irregular descomponiéndolo en prismas rectangulares y triangulares cuyo volumen podemos calcular fácilmente.

#### Quinto nivel de abstracción

5. Utilizando el material didáctico entender y demostrar que el volumen de cualquier pirámide recta y regular y de cualquier cono se calcula multiplicando el área de la base por la altura y dividiendo entre tres. Calcular el volumen de pirámides rectas y regulares y conos.

$$\text{Volumen}_{\text{Pirámide, Cono}} = \frac{\text{Área}_{\text{Base}} \times \text{Altura}}{3}$$

6. Calcular el volumen de un poliedro irregular descomponiéndolo en prismas y pirámides cuyo volumen podemos calcular fácilmente.

#### Sexto nivel de abstracción

7. Utilizando el material didáctico entender y demostrar que el volumen de cualquier prisma oblicuo se calcula multiplicando el área de la base por la altura perpendicular de la base a la

cara superior. Calcular el volumen de prismas oblicuos.

$$\text{Volumen}_{\text{Prisma oblicuo}} = \text{Área}_{\text{Base}} \times \text{Altura}_{\text{Perpendicular}}$$

8. Utilizando el material didáctico entender y demostrar que el volumen de cualquier pirámide oblicua se calcula multiplicando el área de la base por la altura perpendicular de la base al vértice superior y dividiendo entre tres. Calcular el volumen de pirámides y conos oblicuos.

$$\text{Volumen}_{\text{Pirámide Oblicua}} = \frac{\text{Área}_{\text{Base}} \times \text{Altura}_{\text{Perpendicular}}}{3}$$

9. Calcular el volumen de un poliedro irregular descomponiéndolo en prismas y pirámides rectas y oblicuas cuyo volumen podemos calcular fácilmente.